Mathematik für Betriebswirte II
(Analysis)

1. Klausur **Sommersemester 2017** **21.07.2017**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 10 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	max. Pkt.	err. Pkt.
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: Folgen und Reihen (10 Punkte)

1. Prüfen Sie die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2^k}$$

unter Verwendung des Quotientenkriteriums auf absolute Konvergenz.

2. Geben Sie die Reihe

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{15} + \frac{4}{45} - \frac{8}{135} + \cdots$$

in der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ an und berechnen Sie den Wert dieser Reihe.

Lösung:

1.

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1}}{(-1)^k} \frac{(k+2)2^k}{(k+1)2^{k+1}}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+2}{k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{k+2}{k+1}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe absolut konvergent.

2. Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit Anfangsglied $a_0 = \frac{1}{5}$ und $q = -\frac{2}{3}$. Daher gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{3}{25}$$

Aufgabe 2: Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} tx + 1 & \text{für} \quad x < 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 - s & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

auch an der Stelle x=1 stetig und differenzierbar?

Lösung:
Die Funktion ist an allen Stellen $x \neq 1$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Für $t = -1$ und $s = -\frac{1}{2}$ ist die Funktion auch an der Stelle $x = 1$ stetig und differenzierbar.

Aufgabe 3: Optimierung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \, .$$

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremstellen von f unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$x_2 + 3x_3 = -4 \quad \text{und} \quad -x_1 - x_3 = -2 \, .$$

Lösung: Die Funktion besitzt an der Stelle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{11} \\ -\frac{17}{11} \\ -\frac{9}{11} \end{pmatrix}$ eine globale Minimalstelle.

Aufgabe 4: Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern diese existieren:

   a)
   $$\lim_{x\to 5} \frac{\sin(\pi x) - \sin(5\pi)}{x-5}$$

   b)
   $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

2. Geben Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen an und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

   a)
   $$f(x) = -x^2 \cdot e^{3x^2+1} + 1$$

   b)
   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin(2x-1)+2}}$$

Lösung:

1.a) Mit Hilfe des Satzes von L'Hospital ergibt sich folgender Grenzwert:

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sin(\pi x) - \sin(5\pi)}{x-5} = -\pi$$

1.b) Mit Hilfe des Satzes von L'Hospital ergibt sich folgender Grenzwert:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

2.a)

$$f'(x) = e^{3x^2+1}(-2x - 6x^3)$$

2.b)

$$f'(x) = -\frac{\cos(2x-1)}{\sqrt{(\sin(2x-1)+2)^3}}$$

Aufgabe 5: Approximationsverfahren (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt[3]{2x+2} \end{aligned}$$

a) Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ auf.

b) Berechnen Sie das Restglied $R_{2;3}(4)$.

Lösung:

a) Das Taylorpolynom 2. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ lautet:

$$T_{2;3}(x) = 2 + \frac{1}{6}(x-3) - \frac{1}{72}(x-3)^2$$

b) Es gilt:

$$R_{2;3}(4) = f(4) - T_{2;3}(4) \approx 0,00166$$

Aufgabe 6: Kurvendiskussion (10 Punkte)

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ x &\mapsto f_k(x) = (x-k)\cdot e^{-2x} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f in Abhängigkeit von k.

b) Bestimmen Sie den lokalen Extrempunkt von f in Abhängigkeit von k und klassifizieren Sie diesen.

Lösung:

a) Aus der Bedingung
$f_k(x) = (x-k)\cdot e^{-2x} = 0$, folgt $x = k$.

b) Für die Ableitungen von f gilt:

$$f_k'(x) = e^{-2x}(1-2x+2k)$$
$$f_k''(x) = e^{-2x}(-4+4x-4k)$$

Extremstelle:
Aus der Bedingung
$f_k'(x) = e^{-2x}(1-2x+2k) = 0$, folgt $x = k + \frac{1}{2}$.
Es ist: f"$(k+\frac{1}{2}) = -2e^{-2k-1} < 0$. D.h. für jedes $k \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $f_k(x)$ ein lokales Maximum an der Stelle $k+\frac{1}{2}$.
Lokaler Extrempunkt: $(k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-2k-1})$

Aufgabe 7: Integralrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale:

a)

$$\int_{-2}^{2} (|x| - 3)\ dx$$

b)

$$\int_{1}^{\infty} e^{4-2x}\ dx$$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} (|x| - 3)\ dx &= \int_{-2}^{0} (-x - 3)\ dx + \int_{0}^{2} (x - 3)\ dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_{0}^{2} = -8\end{aligned}$$

b) Man erhält:

$$\int_{1}^{\infty} e^{4-2x}\ dx = \lim_{a\to\infty} \int_{1}^{a} e^{4-2x}\ dx = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{4-2x}\right]_{1}^{a} = \frac{1}{2}e^2$$

Aufgabe 8: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : D & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{\sqrt{y}} + z \end{array}$$

mit $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y > 0\}$. Bestimmen Sie den Gradienten von f. Bestimmen Sie zudem die Tangentialhyperebene von f an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$.

Lösung: Gradient:

$$\mathbf{grad}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{\sqrt{y}} \\ -\frac{x^2}{2\sqrt{y^3}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tangentialhyperebene an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$: $f(1,1,1) = 2$
$\mathbf{grad}_f(1,1,1)^T = (2, -\frac{1}{2}, 1)$

$\mathbf{grad}_f(1,1,1)^T \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 2(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) + 1(z-1)$

$$t(\mathbf{x}) = f(1,1,1) + \mathbf{grad}_f(1,1,1)^T \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 2x - \frac{1}{2}y + z - \frac{1}{2}$$

Aufgabe 9: Optimierung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Bestimmen Sie die stationären Stellen der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}\,, \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad f(x, y) = -5x^2 + 2x + 4xy - y^2 - 1 \end{aligned}$$

und klassifizieren Sie diese.

Lösung: Gradient:

$$\mathbf{grad}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -10x + 2 + 4y \\ -2y + 4x \end{pmatrix}$$

Setzt man den Gradienten Null, muss folgendes lineares Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} -10x + 4y &= -2 \\ 4x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Für die stationäre Stelle ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Hessematrix:

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Definitheit der Hessematrix an der stationären Stelle $(1, 2)^T$ wird mit Hilfe des Hauptminorenkriteriums überprüft:
$\det \mathbf{H}_1(1, 2) = -10 < 0$ und $\det \mathbf{H}_2(1, 2) = 4 > 0$

Die Matrix $\mathbf{H}_f(x, y)$ ist negativ definit für alle $(x, y) \in \mathbb{R}$. Bei der stationären Stelle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

handelt es sich somit um ein globales Maximum.