Mathematik für Betriebswirte II
(Analysis)

2. Klausur **Sommersemester 2017** **30.09.2017**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 10 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: Folgen und Reihen (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = (-1)^{n+2} \frac{-2n^4 + 3n^2}{3n^2 - 5n^4 + 1}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz, Häufungspunkte und Beschränktheit.

b) Prüfen Sie die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(4 + (-1)^{k+1})^k}$$

unter Verwendung des Wurzelkriteriums auf absolute Konvergenz.

Aufgabe 2: Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} tx + 2s & \text{für} \quad x < 2 \\ x^2 + s & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

stetig und differenzierbar?

Aufgabe 3: Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktionenschar

$$\begin{aligned} f_t : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ x &\mapsto f_t(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - t^2 x. \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen $f_t(x)$ in Abhängigkeit von t an.

b) Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhaltenverhalten der Funktionen f_t in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 4: Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

   a)
   $$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2-1}$$

   b)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}-1}{2\cos(x)-2}$$

2. Geben Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen an und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

   a)
   $$f(x) = \sqrt{3\cos(x^2+1)-3}$$

   b)
   $$f(x) = \frac{\ln(3x)}{x^2+2}$$

Aufgabe 5: Approximationsverfahren (10 Punkte)

Berechnen Sie mit dem NEWTON-Verfahren unter Verwendung des Startwertes

$$x_0 = 1$$

eine reelle Lösung der Gleichung

$$x - e^{-x} = 0$$

auf vier Iterationen und fünf Nachkommastellen genau.

Aufgabe 6: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion

$$\begin{aligned} f &: (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ (x,y,z) &\mapsto -2x^2y^2z - 2y\ln(x) - e^{-z^2} \end{aligned}$$

das totale Differential und die Tangentialhyperebene an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$.

Aufgabe 7: Integralrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale:

a)

$$\int_0^1 -2xe^{-x^2+2t}\ dx$$

b)

$$\int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x_1 \cdot \frac{1}{x_2}\ dx_1 dx_2$$

Aufgabe 8: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(xy) + e^{2y}$$

den Gradienten und die HESSE-Matrix an der Stelle $(x, y) = (\pi, 1)$.

Aufgabe 9: Optimierung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Die Nachfragefunktionen $x_1(p_1)$ und $x_2(p_2)$ zweier Güter in Abhängigkeit der Preise p_1 und p_2 lauten:

$$\begin{aligned} x_1(p_1) &:= -2p_1 + 140 \quad \text{mit} \quad p_1 \in [0, 70] \\ x_2(p_2) &:= -3p_2 + 360 \quad \text{mit} \quad p_2 \in [0, 120] \end{aligned}$$

Die Herstellungskosten seien gegeben durch:

$$K(x_1, x_2) := 2x_1^2 + 3x_2^2$$

Bei welchen Preisen wird der Gewinn maximal? Berechnen sie diesen Gewinn.
