Mathematik für Betriebswirte II
(Analysis)

1. Klausur **Sommersemester 2016** **25.07.2016**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 10 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: Folgen (10 Punkte)

1. Prüfen Sie die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{(9+(-1)^k)^k}$$
unter Verwendung des Wurzelkriteriums auf Konvergenz.

2. Prüfen Sie die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$
unter Verwendung des Quotientenkriteriums auf Konvergenz.

Lösung:

1. (5 Punkte)
$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{5}{9+(-1)^k}$$
Damit gilt:
$$\frac{5}{9+(-1)^k} = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{2} & : & k \text{ gerade} \\ \frac{5}{8} & : & k \text{ ungerade} \end{array} \right\} < 1$$
Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe konvergent.

2. (5 Punkte)
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+2)^3}{(n+1)^3} \cdot \frac{1}{3}\right|$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+2)^3}{(n+1)^3} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} < 1$$
Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe konvergent.

Aufgabe 2: Stetigkeit und Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x & \text{für} \quad x < 4 \\ 4x & \text{für} \quad x \geq 4 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

b) Passen Sie die Funktion f für $x \geq 4$ so an, dass $f(x)$ stetig und differenzierbar wird.

Lösung:

a) (2 Punkte) Stetigkeit:

$$\lim_{x \uparrow 4} f(x) = \lim_{x \uparrow 4} 2x^2 - 4x = 16$$
$$\lim_{x \downarrow 4} f(x) = \lim_{x \downarrow 4} 4x = 16$$

Der links- und rechtsseitige Grenzwert sind gleich und somit ist die Funktion f stetig.
(4 Punkte) Differenzierbarkeit:

$$\lim_{x \uparrow 4} f'(x) = \lim_{x \uparrow 4} 4x - 4 = 12$$
$$\lim_{x \downarrow 4} f'(x) = \lim_{x \downarrow 4} 4 = 4$$

Der links- und rechtsseitige Grenzwert sind ungleich, somit ist die Funktion f an der Stelle $x = 4$ nicht differenzierbar.

b) (4 Punkte) Mit

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x & \text{für} \quad x < 4 \\ 12x - 32 & \text{für} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

ist die Funktion $f(x)$ differenzierbar. Die folgenden Grenzwerte sind gleich:

$$\lim_{x \uparrow 4} f'(x) = \lim_{x \uparrow 4} 4x - 4 = 12$$
$$\lim_{x \downarrow 4} f'(x) = \lim_{x \downarrow 4} 12 = 12$$

Aufgabe 3: Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Bestimmen Sie die unbekannten Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ der Exponentialfunktion

$$f(x) = (ax + b) \cdot e^{cx},$$

die durch die Punkte $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$ verläuft und im Punkt $P(0/1)$ ein Extremum besitzt.

Lösung: $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = -\frac{1}{2}$

Aufgabe 4: Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren.

a)

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\sin(at)}{\sin(bt)} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} \quad \text{und } b \neq 0$$

b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x}}$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$$

Lösung:

a) (3 Punkte)

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\sin(at)}{\sin(bt)} = \frac{2a}{b}$$

b) (3 Punkte)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

c) (4 Punkte)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = 2$$

Aufgabe 5: Approximationsverfahren (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(\sqrt{3x^2 + 2}).$$

a) Stellen Sie das Taylerpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ auf.

b) Berechnen Sie das Restglied $R_{2;2}(3)$.

Lösung:

a) (4 Punkte) Das Taylorpolynom 2. Grades lautet:

$$T_{2;2}(x) = \ln(\sqrt{14}) + \frac{3}{7}(x-2) - \frac{15}{196}(x-2)^2$$

b) (2 Punkt) Es gilt:

$$R_{2;2}(3) = f(3) - T_{2;2}(3) \approx 0,3762$$

Aufgabe 6: Kurvendiskussion (10 Punkte)

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_k(x) := x \cdot e^{-kx} \quad \text{mit } k > 0 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie den Extrempunkt und Wendepunkt von f in Abängigkeit von k und klassifizieren Sie diese.

b) Welche Kurve hat an der Stelle $x = 3$ einen Wendepunkt? Geben Sie den Wendepunkt an.

Lösung:

a) (8 Punkte)
Extrempunkt: Das Maximum liegt bei $M(\frac{1}{k}/\frac{1}{ke})$.

Wendepunkt: Der konkav-konvex Wendepunkt liegt bei $W(\frac{2}{k}/\frac{2}{ke^2})$.

b) (2 Punkte) Aus $\frac{2}{k} = 3$ folgt $k = \frac{2}{3}$. Der Wendepunkt liegt bei $W(3/\frac{3}{e^2})$.

Aufgabe 7: Integralrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^\infty -x^3 e^{-x^2}\, dx$$

Lösung: (10 Punkte) Substituiere:

$$\begin{aligned} z &:= x^2 \\ \frac{dz}{dx} &= 2x \\ dx &= \frac{1}{2x} dz \end{aligned}$$

Berechne mit Hilfe dieser Substitution das Integral:

$$\int -x^3 e^{-x^2}\, dx = \int -\frac{1}{2} z e^{-z} dz$$

Partielle Integration liefert:

$$\int -\frac{1}{2} z e^{-z} dz = \frac{1}{2} z e^{-z} - \int \frac{1}{2} e^{-z} dz = \frac{1}{2} e^{-z}(z+1)$$

Resubstitution liefert:

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t -x^3 e^{-x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{2} e^{-x^2}(x^2+1)\right]_0^t = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-t^2}(t^2+1) - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe 8: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}, \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) := x^2 y^3 + y^2 z - z^2 \ln(x) \end{aligned}$$

mit $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0\}$. Bestimmen Sie den Gradienten von f. Bestimmen Sie zudem die Tangentialhyperebene von f an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.

Lösung: (5 Punkte) Gradient:

$$\mathbf{grad}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2xy^3 - \frac{z^2}{x} \\ 3y^2x^2 + 2yz \\ y^2 - 2\ln(x)z \end{pmatrix}$$

(5 Punkte) Tangentialhyperebene an der Stelle $\mathbf{x}_0 = \mathbf{1}$:

$$t(\mathbf{x}) = f(\mathbf{1}) + \mathbf{grad}_f(\mathbf{1})^T \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} = x + 5y + z - 5$$

Aufgabe 9: Optimierung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion

$$f(x, y) = 4y + 2x - 8$$

unter der Nebenbedingung

$$2y^2 + 2x^2 = 2 \quad \text{mit } x > 0,\ y > 0$$

mit Hilfe des Lagrange-Verfahrens.

Lösung: Eine stationäre Stelle liegt bei $x = \sqrt{\frac{1}{5}}$ und $y = 2\sqrt{\frac{1}{5}}$ mit $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.