

**Mathematik für Betriebswirte II
(Analysis)**

2. Klausur Sommersemester 2018 21.09.2018

BITTE LESERLICH IN DRUCKBUCHSTABEN AUSFÜLLEN

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

--	--	--	--	--	--	--	--

Studienfach:

Name des Tutors:

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 10 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	max. Pkt.	err. Pkt.
1	10	
2	5	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	15	
Summe	90	
Note		

Aufgabe 1: Folgen und Reihen (10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $0 < q < 1$ mit:

$$a_n = 9q^n + \frac{6n^3 - 4n}{n^4 + 7n} - \frac{5n - 4}{8n} - \frac{2q^n}{n^2}$$

b) Ein Unternehmen produziert $a_0 = 320$ Einheiten eines Gutes im ersten Jahr und steigert die Produktion in jedem der folgenden Jahre um 40 Einheiten.

1. Wie viele Einheiten werden im 15. Jahr produziert?
 2. Wie groß ist die Gesamtproduktionsmenge innerhalb der ersten 15 Jahren?
 3. Wie viele Einheiten werden von dem 10. bis zum einschließlich 15. Jahr produziert?
-

Aufgabe 2: Differentialrechnung in \mathbb{R} (5 Punkte)

Geben Sie die erste Ableitung der Funktion $f : (\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) = \ln \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)$$

an und vereinfachen Sie sie soweit wie möglich.

Aufgabe 3: Differentialrechnung im \mathbb{R}^n (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 14x_1 + 7x_2 + 50.$$

- a) Zeigen Sie, dass $(x_1, x_2) = (5, 6)$ eine globale Maximalstelle von f ist.
 - b) Wie ändert sich näherungsweise die Funktion f , wenn sich $(x_1, x_2) = (6, 6)$ auf $(x_1, x_2) = (5, 6)$ ändert? Verwenden Sie für Ihre Approximation das totale Differential.
-

Aufgabe 4: Differentialrechnung in \mathbb{R} (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - \ln(a) & \text{für } x \leq 1 \\ x^3 - b \ln(x) & \text{für } x > 1 \end{cases} \quad \text{mit } a, b > 0.$$

Bestimmen Sie die Parameter a und b derart, dass f eine stetige und differenzierbare Funktion ist.

Aufgabe 5: Kurvendiskussion (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + x.$$

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens näherungsweise eine Nullstelle der Funktion f . Verwenden Sie dabei den Startwert $x_0 = 1$ und führen Sie vier Iterationen durch. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf vier Nachkommastellen genau.
 - b) Bestimmen Sie die Wendestellen der Funktion f und klassifizieren Sie diese.
-

Aufgabe 6: Approximationsverfahren (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) = 2e^{x^2}.$$

Geben Sie das TAYLOR-Polynom 3. Grades $T_{3;x_0}(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

Aufgabe 7: Integralrechnung (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)

$$\int 5x^4 \ln(7x) \, dx \quad \text{mit } x > 0$$

b)

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{e^y}{\cos^2(x)} \, dx dy$$

Aufgabe 8: Differentialrechnung im \mathbb{R}^n (10 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = 5x^3y + 7x^2e^y - 3y \ln(z)$$

mit $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ den Gradienten und die Hesse-Matrix. Bestimmen Sie zudem die Tangentialhyperebene von f an der Stelle $(1, 0, 1)$.

Aufgabe 9: Optimierung im \mathbb{R}^n (15 Punkte)

Gegeben sei die reellwertige Funktion $f : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + 4xy$$

und die Nebenbedingung

$$g(x, y) = x + y - 162 = 0.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des LAGRANGE-Verfahrens, dass die Funktion f eine globale Maximalstelle besitzt.
