Mathematik für Betriebswirte II
(Analysis)

1. Klausur **Sommersemester 2018** **20.07.2018**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname:..

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors:..

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 10 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	max. Pkt.	err. Pkt.
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: Folgen und Reihen (10 Punkte)

1. Geben Sie die Reihe

$$\frac{4}{11} + \frac{8}{55} + \frac{16}{275} + \frac{32}{1375} + \ldots$$

   in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ an und berechnen Sie den Wert dieser Reihe.

2. Prüfen Sie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$$

   unter Verwendung des Quotientenkriteriums auf absolute Konvergenz.

Lösung:

1. Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit Anfangsglied $a_0 = \frac{4}{11}$ und Quotient $q = \frac{2}{5}$. Daher gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{11} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{20}{33}$$

2. Mit dem Quotientenkriterium folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{n+1}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \\ &= \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

   Damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$ absolut konvergent.

Aufgabe 2: Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1{,}5x) + a & \text{für} \quad x \leq -2, a \in \mathbb{R} \\ \frac{x^3+x^2+x+6}{2x+4} & \text{für} \quad x > -2. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f für $a = 2$ nicht stetig ist. Wie müsste a gewählt werden, damit die Funktion f stetig ist?

Lösung: Für $a = 2$ gilt:

$$\lim_{x \uparrow -2} (\ln(x^2 + 1{,}5x) + 2) = 2 = f(-2)$$

$$\lim_{x \downarrow -2} \frac{x^3 + x^2 + x + 6}{2x + 4} = \lim_{x \downarrow -2} \frac{3x^2 + 2x + 1}{2} = 4{,}5 \neq f(-2)$$

Da die Funktion f für $a = 2$ an der Stelle $x = -2$ nicht rechtsseitig stetig ist, ist die Funktion f an der Stelle $x = -2$ nicht stetig. Für $a = 4{,}5$ wäre die Funktion f auch an der Stelle $x = -2$ rechtsseitig stetig und somit auch insgesamt stetig.

Aufgabe 3: Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{4\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x-4}.$$

a) Geben Sie die erste Ableitung der Funktion f an.

b) Berechnen und vereinfachen Sie $\varphi(\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

c) Berechnen Sie $\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$.

Lösung:

a) Für die Ableitung ergibt sich $f'(x) = -\frac{1}{(x-4)^2}$.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(\Delta x) &= \frac{\frac{1}{x+\Delta x-4} - \frac{1}{x-4}}{\Delta x} \\ &= -\frac{1}{(x+\Delta x-4)(x-4)}\end{aligned}$$

c) Für den Grenzwert ergibt sich:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = -\frac{1}{(x-4)^2}$$

Aufgabe 4: Approximationsverfahren (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) = 2\sqrt{2x+7}$$

mit $D := \{x \in \mathbb{R} | x \geq -\frac{7}{2}\}$.
Geben Sie das TAYLOR-Polynom 3. Grades $T_{3;x_0}(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an und berechnen Sie $f(2)$ näherungsweise anhand von $T_{3;1}(2)$.

Lösung: TAYLOR-Polynom 3. Grades:

$$T_{3;1}(x) = 6 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{27}\left(x-1\right)^2 + \frac{1}{243}\left(x-1\right)^3$$

$T_{3;1}(2) = \frac{1612}{243}$

Aufgabe 5: Grenzwerte (10 Punkte)

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1^x - 1}{\sin(x) - x}$$

b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{10x^2 - 8x + 77}{3e^{2x}}$$

Lösung:

a) Es gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1^x - 1}{\sin(x) - x} = 0$$

b) Es gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{10x^2 - 8x + 77}{3e^{2x}} = 0$$

Aufgabe 6: Kurvendiskussion (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^4 - 25x^2 - 16x + 70.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens näherungsweise einen Extrempunkt der Funktion f und klassifizieren Sie diesen. Verwenden Sie dabei den Startwert $x_0 = 0$ und führen Sie drei Iterationen durch. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf vier Nachkommastellen genau.

Lösung: Ansatz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4x_n^3 - 50x_n - 16}{12x_n^2 - 50}$$

	Nullstelle von $f'(x)$
x_0	0,0000
x_1	-0,3200
x_2	-0,3227
x_3	-0,3227

Mit der zweiten Ableitung ergibt sich $f''(-0{,}3227) \approx -48{,}7504$.
Somit handelt es sich bei $(-0{,}3227; 72{,}5707)$ um einen lokalen Hochpunkt.

Aufgabe 7: Integralrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden RIEMANN-Integrale:

a)

$$\int_1^\infty \frac{ax+a}{x^4}\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } a \in \mathbb{Z}$$

b)

$$\int 6x^2(\cos(x^3-5))\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{ax+a}{x^4}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{a}{2x^2}-\frac{a}{3x^3}\right]_1^n \\ &= \frac{5}{6}a\end{aligned}$$

b) Substituiere:

$$\begin{aligned} u &:= x^3-5 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 3x^2 \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{3x^2}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Mit der Substitution erhält man:

$$\int 6x^2(\cos(x^3-5))\,\mathrm{d}x = 2\sin(x^3-5)+C\ , \quad C \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 8: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $f : (0, \infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = 3e^{xy} + \ln\left(x^2\right)$$

den Gradienten und die HESSE-Matrix an der Stelle $(x, y) = (2, 1)$.

Lösung: Für den Gradienten gilt:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 3ye^{xy} + \frac{2}{x} \\ 3xe^{xy} \end{pmatrix}$$

Die HESSE-Matrix ergibt sich zu:

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3y^2e^{xy} - \frac{2}{x^2} & 3e^{xy} + 3xye^{xy} \\ 3e^{xy} + 3xye^{xy} & 3x^2e^{xy} \end{pmatrix}$$

Damit erhält man die Lösungen:

$$\operatorname{grad} f(2, 1) = \begin{pmatrix} 3e^2 + 1 \\ 6e^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{H}_f(2, 1) = 3 \begin{pmatrix} e^2 - \frac{1}{6} & 3e^2 \\ 3e^2 & 4e^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Optimierung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = -10x^2 + 4x + 2xy - y^2 - 100.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f ein globales Maximum besitzt.

Lösung: Der Gradient lautet:

$$\mathbf{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -20x + 4 + 2y \\ 2x - 2y \end{pmatrix}$$

Somit lautet die stationäre Stelle:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Für die Hessematrix ergibt sich:

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -20 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Bei der stationären Stelle $(x, y)^T = (\frac{2}{9}, \frac{2}{9})^T$ handelt es sich um ein globales Maximum.