Mathematik für Betriebswirte II
(Analysis)

2. Klausur **Sommersemester 2018** **21.09.2018**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 10 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	10	
2	5	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	15	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: Folgen und Reihen (10 Punkte)

a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $0 < q < 1$ mit:

$$a_n = 9q^n + \frac{6n^3 - 4n}{n^4 + 7n} - \frac{5n - 4}{8n} - \frac{2q^n}{n^2}$$

b) Ein Unternehmen produziert $a_0 = 320$ Einheiten eines Gutes im ersten Jahr und steigert die Produktion in jedem der folgenden Jahre um 40 Einheiten.

1. Wie viele Einheiten werden im 15. Jahr produziert?
2. Wie groß ist die Gesamtproduktionsmenge innerhalb der ersten 15 Jahren?
3. Wie viele Einheiten werden von dem 10. bis zum einschließlich 15. Jahr produziert?

Lösung:

a) Für den Grenzwert ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{5}{8}$$

b)
1. Es gilt:

$$a_{14} = 880$$

2. Es gilt:

$$s_{14} = 9000$$

3. Es gilt:

$$s_{14} - s_9 = 4000$$

Aufgabe 2: Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (5 Punkte)

Geben Sie die erste Ableitung der Funktion $f : \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)$$

an und vereinfachen Sie sie soweit wie möglich.

Lösung:
Es gilt:

$$f'(x) = -\frac{4}{4x^2-1}$$

Aufgabe 3: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$(x_1, x_2) \quad \mapsto \quad f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 14x_1 + 7x_2 + 50.$$

a) Zeigen Sie, dass $(x_1, x_2) = (5, 6)$ eine globale Maximalstelle von f ist.

b) Wie ändert sich näherungsweise die Funktion f, wenn sich $(x_1, x_2) = (6, 6)$ auf $(x_1, x_2) = (5, 6)$ ändert? Verwenden Sie für Ihre Approximation das totale Differential.

Lösung:

a) Für die partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2)$ gilt:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -4x_1 + x_2 + 14$$
$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -2x_2 + x_1 + 7$$

Einsetzen von $(x_1, x_2) = (5, 6)$ in die partiellen Ableitungen liefert $\frac{\partial f(5,6)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(5,6)}{\partial x_2} = 0$. Somit handelt es sich bei $(x_1, x_2) = (5, 6)$ um eine stationäre Stelle der Funktion f.

Die Hesse-Matrix von $f(x_1, x_2)$ ist gegeben durch:

$$\mathbf{H}_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Da $\mathbf{H}_f(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ negativ definit ist, handelt es sich bei $(x_1, x_2) = (5, 6)$ um eine globale Maximalstelle von f.

b) Der approximative Änderungswert ergibt sich zu:

$$df(6, 6) \approx 4$$

Aufgabe 4: Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - \ln(a) & \text{für} \quad x \leq 1 \\ x^3 - b\ln(x) & \text{für} \quad x > 1 \end{cases} \qquad \text{mit } a, b > 0.$$

Bestimmen Sie die Parameter a und b derart, dass f eine stetige und differenzierbare Funktion ist.

Lösung: Es gilt:

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = 1 - \ln(a)$$
$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = 1$$

Daraus folgt:

$$a = 1$$

Weiterhin gilt:

$$\lim_{x \uparrow 1} f'(x) = 2$$
$$\lim_{x \downarrow 1} f'(x) = 3 - b$$

Daraus folgt, dass f stetig und differenzierbar ist für $a = b = 1$.

Aufgabe 5: Kurvendiskussion (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + x.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens näherungsweise eine Nullstelle der Funktion f. Verwenden Sie dabei den Startwert $x_0 = 1$ und führen Sie vier Iterationen durch. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf vier Nachkommastellen genau.

b) Bestimmen Sie die Wendestellen der Funktion f und klassifizieren Sie diese.

Lösung:

a) Ansatz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{1}{20}x_n^5 - \frac{8}{3}x_n^3 + x_n}{\frac{1}{4}x_n^4 - 8x_n^2 + 1}$$

	Nullstelle von $f(x)$
x_0	1,0000
x_1	0,7605
x_2	0,6477
x_3	0,6169
x_4	0,6146

b) Die dritte Ableitung lautet:

$$f'''(x) = 3x^2 - 16$$

Durch Nullsetzen der zweiten Ableitung erhält man die drei Wendestellen:

$$x_1 = 0, x_2 = -4, x_3 = 4$$

Mit Hilfe der dritten Ableitung folgt, dass $x_1 = 0$ eine konvex/konkav Wendestelle ist und dass $x_2 = -4, x_3 = 4$ konkav/konvex Wendestellen von f sind.

Aufgabe 6: Approximationsverfahren (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) = 2e^{x^2}.$$

Geben Sie das TAYLOR-Polynom 3. Grades $T_{3;x_0}(x)$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

Lösung: TAYLOR-Polynom 3. Grades:

$$T_{3;1}(x) = 2e + 4e(x-1) + 6e(x-1)^2 + \frac{20}{3}e(x-1)^3$$

Aufgabe 7: Integralrechnung (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)

$$\int 5x^4 \ln(7x)\ \mathrm{d}x \quad \text{mit } x > 0$$

b)

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{e^y}{\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Lösung:

a) Unter Verwendung der partiellen Integration folgt:

$$\begin{aligned} \int 5x^4 \ln(7x)\ \mathrm{d}x &= x^5 \ln(7x) - \int x^4 \mathrm{d}x \\ &= x^5 \left(\ln(7x) - \frac{1}{5} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{e^y}{\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left[\tan(x)e^y\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}\ \mathrm{d}y \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ (10 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = 5x^3y + 7x^2e^y - 3y\ln(z)$$

mit $D := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\right\}$ den Gradienten und die Hesse-Matrix. Bestimmen Sie zudem die Tangentialhyperebene von f an der Stelle $(1, 0, 1)$.

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}_f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 15x^2y + 14xe^y \\ 5x^3 + 7x^2e^y - 3\ln(z) \\ -\frac{3y}{z} \end{pmatrix} \\
\mathbf{H}_f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 30xy + 14e^y & 15x^2 + 14xe^y & 0 \\ 15x^2 + 14xe^y & 7x^2e^y & -\frac{3}{z} \\ 0 & -\frac{3}{z} & \frac{3y}{z^2} \end{pmatrix} \\
t_f(x, y, z) &= 14x + 12y - 7
\end{aligned}$$

Aufgabe 9: Optimierung im $\mathbb{R}^n$ (15 Punkte)

Gegeben sei die reellwertige Funktion $f : (0, \infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + 4xy$$

und die Nebenbedingung

$$g(x, y) = x + y - 162 = 0.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des LAGRANGE-Verfahrens, dass die Funktion f eine globale Maximalstelle besitzt.

Lösung: Die LAGRANGE-Funktion ergibt sich zu:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 4xy + \lambda(x + y - 162)$$

Es ergibt sich eine stationäre Stelle bei $(x, y) = (108, 54)$ mit $\lambda = -432$.

Für die Jacobi-Matrix gilt nun:

$$\mathbf{J}_g(x, y) = (1, 1)$$

Um zu überprüfen, ob es sich bei der stationären Stelle wirklich um eine Extremalstelle handelt, wird die geränderte Hesse-Matrix gebildet:

$$\mathbf{H}_L(-432, x, y) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Bei $n = 2$ Variablen muss wegen $n - k = 1$ nur der letzte Hauptminor von $\mathbf{H}_L(-432, x, y)$ berechnet werden. Mit der Regel von Sarrus erhält man:

$$\det(\mathbf{H}_L(-432, x, y)) = 6 > 0$$

Somit ist die stationäre Stelle $(x, y) = (108, 54)$ eine lokale Maximalstelle. Da $(x, y) = (108, 54)$ die einzige stationäre Stelle ist, handelt es sich bei $(x, y) = (108, 54)$ sogar um eine globale Maximalstelle der Funktion f unter der Nebenbedingung g.