Mathematik für Betriebswirte II
(Analysis)

1. Klausur **Sommersemester 2019** **19.07.2019**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 9 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	max. Pkt.	err. Pkt.
1	11	
2	13	
3	19	
4	12	
5	17	
6	9	
7	9	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1 (11 Punkte):

Begründen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren und berechnen Sie wenn möglich Ihren Grenzwert:

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k^3 + 2k + 5}{3k^2 + 3}$$

c)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k!}$$

Lösung:

a) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{10}{3}$$

b) Die Reihe ist nicht konvergent.

c) Mit Hilfe des Quotientenkriteriums ergibt sich:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{k+1} < 1 \quad \text{für alle } k > 0$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe konvergent.

Aufgabe 2 (13 Punkte):

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - \ln(a) & \text{für} \quad x \leq 2 \\ x^3 - 6bx & \text{für} \quad x > 2 \end{cases} \qquad \text{mit } a, b > 0.$$

Bestimmen Sie die Parameter a und b derart, dass f eine stetige und differenzierbare Funktion ist.

Lösung: f ist stetig und differenzierbar für:

$$b = \frac{4}{3} \qquad \text{und} \qquad a = e^{12}$$

Aufgabe 3 (19 Punkte):

Gegeben sei die Funktion

$$f : [-3,3] \to \mathbb{R}\,,\quad x \mapsto f(x) := -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}.$$

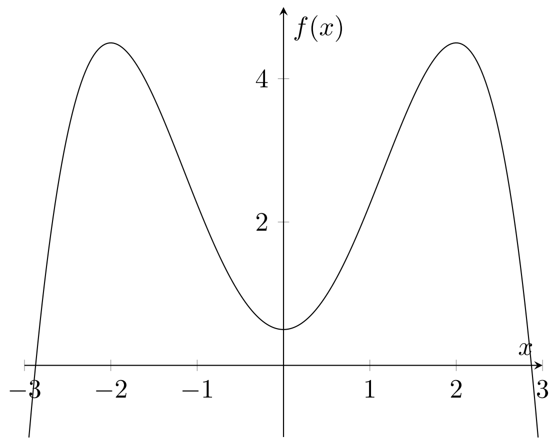
a) Skizzieren Sie die Funktion f in einem kartesischen Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Hilfe eines Näherungsverfahrens auf vier Nachkommastellen genau.

c) Bestimmen Sie alle vorhandenen globalen und lokalen Extremstellen der Funktion f und klassifizieren Sie diese.

Lösung:

a) Skizze: (3 Punkte)



b) Die Nullstellen ergeben sich zu $x_{1,2} = \pm 2{,}871$.

c) Die Funktion besitzt globale Hochpunkte an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$, einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle $x_3 = 0$ und zwei globale Tiefpunkte an den Stellen $x_4 = -3$ und $x_5 = 3$.

Aufgabe 4 (12 Punkte):

Geben Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen an und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich:

a)

$$\begin{aligned} f:(2,\infty) &\to \mathbb{R}\,, \\ x &\mapsto f(x) := \ln\left(\frac{x+2}{x^2-4}\right) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\,, \\ a &\mapsto g(a) := a^2 \cdot \ln(x^a) \\ & \quad \text{mit } x>0, x\neq 1 \end{aligned}$$

Lösung:

a)

$$f'(x) = -\frac{1}{x-2}\cdot 1$$

b)

$$g'(a) = 3a^2 \cdot \ln(x)$$

Aufgabe 5 (17 Punkte):

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)

$$\int_1^2 x^3 \ln(x^2)\; dx \quad \text{mit } x > 0$$

b)

$$\int_0^1 \int_0^2 x e^y\; dx dy$$

Lösung:

a)

$$\int_1^2 x^3 \ln(x^2)\; dx \approx 3,67$$

b)

$$\int_0^1 \int_0^2 x e^y\; dx dy = 3{,}4366$$

Aufgabe 6 (9 Punkte):

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 4x^3yz^2 - e^{yz} - \ln(\sqrt{x})$$

den Gradienten und die Hesse-Matrix.

Lösung: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\text{grad } f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 12x^2yz^2 - \frac{1}{2x} \\ 4x^3z^2 - ze^{yz} \\ 8x^3yz - ye^{yz} \end{pmatrix} \\
\mathbf{H}_f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 24xyz^2 + \frac{1}{2x^2} & 12x^2z^2 & 24x^2yz \\ 12x^2z^2 & -z^2e^{yz} & 8x^3z - (1 + yz)e^{yz} \\ 24x^2yz & 8x^3z - (1 + yz)e^{yz} & 8x^3y - y^2e^{yz} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (9 Punkte):

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) := 2x^2 + 6y^2 + 4z^2$$

und den Nebenbedingungen

$$-8x - 24y = 160 \quad \text{und} \quad -12y - 24z = -240\,.$$

a) Bestätigen Sie mit Hilfe des LAGRANGE-Verfahrens, dass für die stationäre Stelle von f unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

gilt.

b) Begründen Sie, warum es sich bei f um eine konvexe Funktion handelt.

c) Klassifizieren Sie die in Aufgabenteil a) gegebene stationäre Stelle.

Lösung:

a) Nullsetzen der partiellen Ableitungen und Einsetzen von $x = -8$, $y = -4$ und $z = 12$ bestätigt die stationäre Stelle (x_0, y_0, z_0).

b) Die Hessematrix ist für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ positiv definit und somit ist die Funktion f konvex.

c) Da es sich um eine konvexe Funktion handelt, ist die stationäre Stelle ein globaler Tiefpunkt.