Mathematik für Betriebswirte II
(Analysis)

2. Klausur **Sommersemester 2019** **13.09.2019**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 8 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	max. Pkt.	err. Pkt.
1	10	
2	16	
3	15	
4	14	
5	11	
6	9	
7	15	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = \frac{3n^2 + 5n + 1}{n^2 + 2n + 5}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz, Häufungspunkte, Beschränktheit und geben Sie das Monotonieverhalten, ggf. das Maximum und Minimum, sowie das Supremum und Infimum an.

b) Mark möchte sich einen neuen PC zu einem Preis von 2.480,– € kaufen und in monatlichen Raten abbezahlen. Er hat die Idee mit 5 Euro anzufangen und die Rate jeden Monat um 5 Euro zu erhöhen. Nehmen Sie begründet Stellung zu seinem Plan, den PC auf diese Weise in spätestens 3 Jahren abbezahlt zu haben.

Lösung:

a) **Konvergenz:** Die Folge a_n konvergiert.
Der Grenzwert ist 3.

Häufungspunkte: Da die Folge a_n besitzt einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert.
Beschränktheit: Die Folge a_n ist beschränkt, da sie konvergent ist.
Monotonie: Die Folge a_n ist monoton steigend.
Maximum: Die Folge a_n besitzt kein Maximum.
Minimum: Für das Minimum gilt $\min a_n = a_1 = \frac{9}{8}$.
Supremum: Für das Supremum gilt $\sup a_n = 3$.
Infimum: Für das Infimum gilt $\inf a_n = a_1 = \frac{9}{8}$.

b) Marks Plan funktioniert. (1 Punkt)

Aufgabe 2: (16 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{für} \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^3 - \frac{15}{4}x^2 + 9x - \frac{19}{4} & \text{für} \quad x > 1. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie alle vorhandenen globalen und lokalen Extrempunkte der Funktion f und klassifizieren Sie diese.

Lösung:

a) Der links- und rechtsseitige Grenzwert existieren und stimmen mit $f(1)$ überein. Die Funktion f ist also stetig.

   Für die Differenzierbarkeit müssen zusätzlich zur Stetigkeit der links- und rechtsseitige Grenzwert der 1. Ableitung existieren und übereinstimmen. Dies ist hier nicht der Fall.

b) Die Funktion f hat ein globales Maximum bei (2/2,25) und zwei lokale Minima bei (3/2) und (1/1).

Aufgabe 3: (15 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f:(0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := \frac{\ln(x)}{x}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert für $x \to \infty$, sofern dieser existiert.

c) Bestimmen Sie alle vorhandenen globalen Extremstellen der Funktion f und klassifizieren Sie diese.

d) Geben Sie die Monotoniebereiche an und klassifizieren Sie diese.

Lösung:

a)

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

c) Die Funktion f hat ein globales Maximum an der Stelle $x_1 = e$.

d) Die Funktion f ist streng monoton steigend für $x \in (0, e]$ und streng monoton fallend für $x \in [e, \infty)$. (2 Punkte)

Aufgabe 4: (14 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : (-2,2) &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) := \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right). \end{aligned}$$

a) Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ auf.

b) Berechnen Sie das Restglied $R_{2;1}(0)$.

Lösung:

a)

$$T_{2;1}(x) = \ln(3) + \frac{4}{3}(x-1) + \frac{4}{9}(x-1)^2$$

b)

$$R_{2;1}(0) \approx -0{,}2097$$

Aufgabe 5: (11 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)

$$\int_0^\infty xe^{-2x^2+4}\ dx$$

b)

$$\int_2^4 x^2\ d\ln(x)$$

Lösung:

a)

$$\int_0^\infty xe^{-2x^2+4}\ dx = \frac{1}{4}e^4$$

b)

$$\int_2^4 x^2\ d\ln(x) = 6$$

Aufgabe 6: (9 Punkte)

Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(xy) + e^{2y}$$

den Gradienten und die HESSE-Matrix an der Stelle $(x, y) = (\pi, 1)$.

Lösung:

$$\operatorname{grad} f(\pi, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi + 2e^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_f(\pi, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4e^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: (15 Punkte)

Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion

$$f(x, y) := 4x - 0{,}8x^2 + 8y - 0{,}4y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$0{,}8x + 0{,}4y = 5{,}4$$

mit Hilfe des Lagrange-Verfahrens.

Lösung: Die einzige stationäre Stelle der Funktion $f(x, y)$ ist $(x, y) = (2, 9{,}5)$.