Mathematik II
(Analysis)

1. Klausur **Sommersemester 2023** **27.07.2023**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 8 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	15	
2	9	
3	15	
4	19	
5	16	
6	16	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1 (15 Punkte):

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern diese existieren:

a)
$$s_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}}, \; n \in \mathbb{N}$$

c)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 - 4n}{n+2} - 2n + \frac{1}{n-2} \right), \; n \in \mathbb{N}$$

d)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, \; x \in \mathbb{R}_+$$

Lösung:

a) 4

b) 1

c) -8

d) $\frac{1}{2}$

Aufgabe 2 (9 Punkte):

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}\,, \\ x &\mapsto f(x) := \frac{2x^2 + x}{x}. \end{aligned}$$

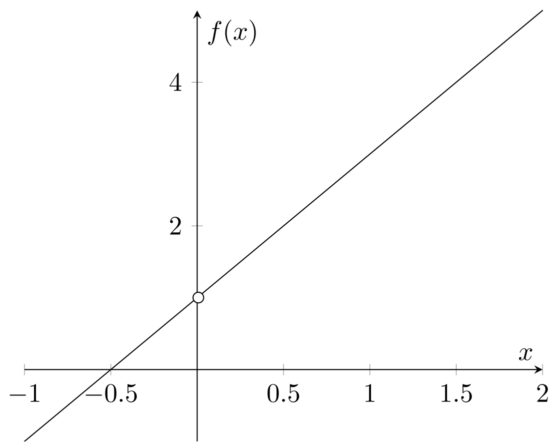
a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-1, 2]$.

b) Zeigen Sie, dass $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig fortgesetzt werden kann.

c) Berechnen Sie $\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\, dx$ der stetig fortgesetzten Funktion $\tilde{f}(x)$.

Lösung:

a) Skizze:



b) Es gilt

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Die Funktion f lässt sich somit wie folgt stetig ergänzen:

$$x \mapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+x}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

c) Es gilt:

$$\int_{-1}^{1} 2x + 1 \; dx = 2$$

Aufgabe 3 (15 Punkte):

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen und vereinfachen Sie sie so weit wie möglich:

a)

$$f'(x) \text{ mit } f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

b)

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \text{ mit } f(x,y) = y\sqrt{x} - \frac{x^2}{y} + x$$

c)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ mit } f(x,y) = -\frac{1}{x^2}\sin(xy) + e^{2xy^2} - \ln(2y)$$

Lösung:

a)

$$f'(x)\frac{1}{1+e^x}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \sqrt{x} + \frac{x^2}{y^2}\\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= -2\frac{x^2}{y^3}\end{aligned}$$

c)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2\sin(xy)}{x^3} - \frac{y\cos(xy)}{x^2} + 2y^2e^{2xy^2}$$

Aufgabe 4 (19 Punkte):

Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\,, \\ x &\mapsto f(x) := \frac{1-x^2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte $x \mapsto \pm\infty$ der Funktion f.

c) Berechnen und klassifizieren Sie die lokalen und globalen Extremstellen der Funktion f. Geben Sie auch Supremum und Infimum an.

d) Bestimmen und klassifizieren Sie die Wendestellen der Funktion f.

Lösung:

a)

$$x = \pm 1$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1$$

c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow x = 0 \\ f''(x) &= \frac{12x^2-4}{(1+x^2)^3} \\ f''(0) &= -4 < 0 \Rightarrow \text{ an der Stelle } x = 0 \text{ liegt ein lokales Maximum vor.} \end{aligned}$$

Da außerdem $f(0) = 1$ und $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$ gilt, handelt es sich sogar um ein globales Maximum.
Beim Maximum handelt es sich auch um das Supremum. Das Infimum ist der Grenzwert -1.

d)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

An der Stelle $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ liegt eine konvex/konkav und an der Stelle $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ eine konkav/konvex Wendestelle vor.

Aufgabe 5 (16 Punkte):

a) Berechnen Sie die die Stammfunktion $F(x)$ der Funktion

$$f(x) = 3 + e^x \text{ mit } F(0) = 50.$$

b) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\ dx$$

c) Berechnen Sie das Integral der Funktion

$$f : [1,4] \times [0,1], (x,y) \to 2x + y^2.$$

Lösung:

a)

$$F(x) = 3x + e^x + 49$$

b) Mit Hilfe von Substitution ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\ dx = \frac{1}{4}$$

c) Es gilt:

$$\int_0^1 \int_1^4 (2x + y^2)\ dxdy = 16$$