Mathematik II
(Analysis)

2. Klausur **Sommersemester 2023** **25.09.2023**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 8 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	13	
2	11	
3	15	
4	16	
5	16	
6	19	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1 (13 Punkte):

a) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, Beschränktheit und Häufungspunkte. Geben Sie außerdem das Monotonieverhalten und ggf. Maximum und Minimum bzw. Supremum und Infimum an:

$$a_n := \frac{3n^2 + 2n}{3(2n+1)^2}$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n, \quad a_1 = 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lösung:

a) Die Folge a_n konvergiert mit Grenzwert $\frac{1}{4}$, ist beschränkt, besitzt nur einen Häufungspunkt undist monoton steigend.
Supremum ist der Grenzwert $\frac{1}{4}$, Maximum existiert nicht, Infimum/Minimum ist $a_1 = \frac{5}{27}$.

b) Da $q < 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \cdot 3 = 9$$

Aufgabe 2 (11 Punkte):

Bestimmen Sie mit Hilfe des TAYLOR-Polynoms 2. Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ approximativ die Nullstellen der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\,, \\ x &\mapsto f(x) := 8e^x - 9 - 6x + 4x^2. \end{aligned}$$

und berechnen Sie den Fehler der positiven Nullstelle auf 4 Nachkommastellen genau.

Lösung: Es gilt:

$$T_{2;0}(x) = -1 + 2x + 8x^2$$

Die Nullstellen ergeben sich damit zu: (2 Punkte)

$$x_1 = \frac{1}{4},\; x_2 = -\frac{1}{2}$$

Fehler:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0{,}0222$$

Aufgabe 3 (15 Punkte):

a) Die Verkaufsleitung eines Unternehmens hat festgestellt, dass sich zwischen Preis x und Absatz A folgender Zusammenhang beobachten lässt:

$$A(x) = 50 \cdot \left(15 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{x}\right), \quad 0 \leq x \leq 20$$

Bei welchem Preis ist der Umsatz U unter diesen Bedingungen maximal?

b) Für den Gewinn G stellt die Verkaufsleitung die folgende Funktion auf:

$$\begin{aligned} G : [0; \infty) \quad &\to \quad \mathbb{R}\ , \\ x \quad &\mapsto \quad G(x) := -\frac{1}{2}x^2(x-3) \end{aligned}$$

i) In welcher Preisspanne erzielt das Unternehmen Gewinn?

ii) Bei welchem Preis ist der Gewinnanstieg maximal und wie hoch ist dieser?

Lösung:

a) Das Umsatzmaximum liegt bei $x = 10$.

b) i) Die Nullstellen ergeben sich zu: $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$
Da es sich um ein Polynom 3. Grades mit negativem Vorzeichen handelt, kann nur der Bereich $x \in (0; 3)$ positiv sein.

ii) Bei $x = 1$ handelt es sich um den maximalen Gewinnanstieg.
Dieser hat den Wert $G'(1) = \frac{3}{2}$.

Aufgabe 4 (16 Punkte):

Berechnen Sie die folgenden Riemann-Integrale:

a)

$$\int_0^1 x\sqrt{x}\ dx$$

b)

$$\int_1^\infty \frac{x^3 + 5x^2 + 3x + 4}{x^5}\ dx$$

Berechnen Sie das folgende Riemann-Integral mit Hilfe der Partiellen Integration:

c)

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\ dx$$

Lösung:

a)

$$\int_0^1 x\sqrt{x}\ dx = \frac{2}{5}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{x^3 + 5x^2 + 3x + 4}{x^5}\ dx &= \lim_{a\to\infty} \int_1^a x^{-2} + 5x^{-3} + 3x^{-4} + 4x^{-5}\ dx \\ &= \frac{11}{2}\end{aligned}$$

c)

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\ dx = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

Aufgabe 5 (16 Punkte):

a) Berechnen Sie den Gradienten und die HESSE-Matrix für folgende Funktion und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^x(x^2 - y^2)$$

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt[3]{8 + x - \sin y}.$$

Bestimmen Sie die Tangentialhyperebene von $f(x, y)$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und prüfen Sie, ob der Punkt $(x, y, f(x, y)) = (6, 18, 1)$ auf der Ebene liegt.

Lösung:

a)

$$\mathbf{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x(x^2 - y^2 + 2x) \\ -2ye^x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x(x^2 - y^2 + 4x + 2) & -2ye^x \\ -2ye^x & -2e^x \end{pmatrix}$$

b)

$$t(x, y) = 2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{12}y$$

Punktprobe:

$$2 + \frac{1}{12} \cdot 6 - \frac{1}{12} \cdot 18 = 1$$

Aufgabe 6 (19 Punkte):

Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$$

unter der Nebenbedingung

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$$

mit Hilfe des LAGRANGE-Verfahrens und klassifizieren Sie diese.

Lösung:

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} - 1 \right)$$

$$\text{grad } L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{x^2} \\ 1 - \frac{4\lambda}{y^2} \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{y} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_L(9, 3, 6) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{H}_L(9, 3, 6) = -\frac{1}{81} < 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x = 3, y = 6.$$