

**Mathematik für Betriebswirte I
(Lineare Algebra)**

1. Klausur Wintersemester 2016/2017 13.02.2017

BITTE LESERLICH IN DRUCKBUCHSTABEN AUSFÜLLEN

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

--	--	--	--	--	--	--	--

Studienfach:

Name des Tutors:

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 12 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	max. Pkt.	err. Pkt.
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Summe	90	
Note		

Aufgabe 1: Mengenlehre (10 Punkte)

Aufgabe 1.1.

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 5, 7\}$ und $\Omega = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 7\}$, wobei Ω die Grundmenge bezeichnet. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $\overline{A} \cap B$

b) $\overline{(A \cap B) \cup C}$

Aufgabe 1.2.

Gegeben seien die Mengen:

$$A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} : y = x^2 - 2x - 15\}$$

$$B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} : y = x^2 - 7x + 10\}$$

Bestimmen Sie $A \cap B$.

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen (10 Punkte)

Aufgabe 2.1.

Berechnen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\left(\frac{|-4 - 3i| - 1}{1 - 4i} + \frac{(3 - \sqrt{3}i) \cdot (3 + \sqrt{3}i)}{3 - 12i} \right) \cdot \frac{\overline{4i + 1}}{4}$$

Aufgabe 2.2.

Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Lösungen der folgenden Gleichung:

$$z^2 + (i + 2)z = -i$$

Aufgabe 3: Vollständige Induktion (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

gilt.

Aufgabe 4: Lineare Unterräume (10 Punkte)

Prüfen Sie folgende Mengen auf Abgeschlossenheit bzgl. der Addition und skalaren Multiplikation. Bestimmen Sie, ob es sich bei den Mengen um reelle Vektorräume handelt.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mid y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}, y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = 0 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 5: Determinanten (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & x & -2x \\ -x & 1 & x \\ -4 & -1 & x \end{pmatrix}$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

- a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix \mathbf{A} .
 - b) Berechnen Sie $\det(-2\mathbf{A} + \mathbf{A})$ und $\det(\mathbf{A}^T)^{-1}$ für $x = 2$. Falls Sie in Aufgabenteil a) zu keinem Ergebnis gekommen sind, so nehmen Sie $\det(\mathbf{A}) = -20$ an.
 - c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix \mathbf{A} nicht invertierbar?
-

Aufgabe 6: Inverse Matrizen (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ -3 & 2 & -a \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \mathbb{R}.$$

- a) Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix \mathbf{A} singulär?
 - b) Bestimmen Sie für $a = 1$ die Inverse \mathbf{A}^{-1} .
-

Aufgabe 7: Orthogonale Matrizen (10 Punkte)

Zeigen Sie auf zwei verschiedene Arten, dass die Matrix \mathbf{A} orthogonal ist.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Lineares Gleichungssystem (10 Punkte)

Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\2x_1 + 4x_2 + s^2x_3 &= -1 \\3x_1 + 7x_2 + (s-1)x_3 &= t\end{aligned}$$

Für welche Kombinationen von $s, t \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 9: Eigenwerte und Eigenvektoren (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix \mathbf{A} mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & c^2 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 2c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } c \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} in Abhängigkeit von c .
 - b) Bestimmen Sie für $c = 1$ die zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A} .
-

