Mathematik für Betriebswirte I
(Lineare Algebra)

2. Klausur Wintersemester 2016/2017 20.03.2017

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 12 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: Aussagenlogik - Mengenlehre (10 Punkte)

Aufgabe 1.1.

Prüfen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob es sich bei der folgenden Aussage

$$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow (\neg A)$$

um eine Tautologie, eine Kontradiktion oder eine Kontingenz handelt.

Aufgabe 1.2.

Widerlegen Sie die folgende Gleichung für drei Mengen A, B und C mit Hilfe eines Gegenbeispiels:

$$(A \backslash (B \cup C)) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen (10 Punkte)

Aufgabe 2.1.

Gegeben sei die komplexe Zahl

$$z = 2\sqrt{3} + 2i$$

in algebraischer Form. Geben Sie z in trigonometrischer und exponentieller Darstellung an.

Aufgabe 2.2.

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass der Ausdruck

$$\frac{4 - 6i}{2 + ai}$$

eine reelle Zahl ist, und geben Sie diese Zahl explizit an.

Aufgabe 3: Surjektivität und Injektivität (10 Punkte)

Gegeben sei die folgende Abbildung mit nicht leeren Mengen D und E:

$$f : D \to E$$
$$x \mapsto f(x) = 3x^2 + 9$$

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f für $D = E = \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie D und E derart, dass f bijektiv ist.

c) Bestimmen Sie für den bijektiven Fall die Umkehrfunktion von f.

Aufgabe 4: Lineare Unterräume (10 Punkte)

Prüfen Sie folgende Mengen auf Abgeschlossenheit bzgl. der Addition und skalaren Multiplikation. Bestimmen Sie, ob es sich bei den Mengen um reelle Vektorräume handelt.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 = y^2 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R}, x + y + z = 0 \right\}$$

Aufgabe 5: Vollständige Induktion (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 2$ die Produktgleichung

$$\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

gilt. Ist die Gleichung auch für $n = 1$ gültig?

Aufgabe 6: Determinanten (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & a & -a & -2 \\ -1 & a & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von a.

b) Berechnen Sie $\det\left(-\mathbf{A^3}\right)$ und $\det\left(\mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T\right)^{-1}$ für $a = 1$. Falls Sie in Aufgabenteil a) zu keinem Ergebnis gekommen sind, so nehmen Sie $\det(\mathbf{A}) = -3$ an.

c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{A}$ singulär?

Aufgabe 7: Inverse einer Matrix (10 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} t & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ t & 0 & t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie $\mathbf{AB}$.

b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{B}$ die inverse Matrix von $\mathbf{A}$? Geben Sie die Inverse an.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = (-1, 2, 1)^T$.

Aufgabe 8: Lineares Gleichungssystem (10 Punkte)

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & +ax_3 & = 5 \\ 3x_1 & + & (a+5)x_2 & + \ x_3 & = 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & +ax_3 & = 3 \end{array}$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

b) Bestimmen Sie für $a = 2$ die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 9: Quadratische Formen (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die zu $\mathbf{A}$ gehörige quadratische Form $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$.

b) Bestimmen Sie die Hauptunterdeterminanten von $\mathbf{A}$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{A}$ positiv definit?

c) Sei $a = \frac{5}{2}$. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Geben Sie auf Basis Ihrer Ergebnisse (d.h. ohne Rechnung) die Determinante von A an und begründen Sie, ob die Matrix invertierbar ist oder nicht.
