Mathematik für Betriebswirte I
(Lineare Algebra)

1. Klausur   Wintersemester 2016/2017   13.02.2017

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 11 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: Mengenlehre (10 Punkte)

Aufgabe 1.1.

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 5, 7\}$ und $\Omega = \{x \in \mathbb{Z} | -3 < x \leq 7\}$, wobei Ω die Grundmenge bezeichnet.
Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $\overline{A} \cap B$

b) $\overline{(A \cap B) \cup C}$

Aufgabe 1.2.

Gegeben seien die Mengen:

$$A = \left\{(x, y) | x \in \mathbb{R} : y = x^2 - 2x - 15\right\}$$
$$B = \left\{(x, y) | x \in \mathbb{R} : y = x^2 - 7x + 10\right\}$$

Bestimmen Sie $A \cap B$.

Lösung 1.1:

a) $\overline{A} \cap B = \{4, 5, 6\}$

b) $\overline{(A \cap B) \cup C} = \overline{(A \cap B)} \cap \overline{C} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 6\}$

Lösung 1.2:
Gemeinsamer Punkt ist nur der Punkt $A \cap B = \{(5, 0)\}$.

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen (10 Punkte)

Aufgabe 2.1.

Berechnen Sie den folgenden Ausdruck:

$$\left(\frac{|-4-3i|-1}{1-4i}+\frac{(3-\sqrt{3}i)\cdot(3+\sqrt{3}i)}{3-12i}\right)\cdot\overline{\frac{4i+1}{4}}$$

Aufgabe 2.2.

Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Lösungen der folgenden Gleichung:

$$z^2+(i+2)z=-i$$

Lösung 2.1:

$$\left(\frac{|-4-3i|-1}{1-4i}+\frac{(3-\sqrt{3}i)\cdot(3+\sqrt{3}i)}{3-12i}\right)\cdot\overline{\frac{4i+1}{4}}=2$$

Lösung 2.2:
Die Gleichung ist äquivalent zu:

$$z^2+(i+2)z+i=0$$

Mit der p-q-Formel ergibt sich:

$$\Leftrightarrow z_{1/2}=-1-\frac{1}{2}i\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Aufgabe 3: Vollständige Induktion (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

gilt.

Lösung: Induktionsanfang ($n = 1$):

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{1}{(3-2)(3+1)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3+1}$$

Induktionsschluss ($n \mapsto n+1$):
Zu zeigen ist:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n+1}{3n+4}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{n+1}{3n+4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Lineare Unterräume (10 Punkte)

Prüfen Sie folgende Mengen auf Abgeschlossenheit bzgl. der Addition und skalaren Multiplikation. Bestimmen Sie, ob es sich bei den Mengen um reelle Vektorräume handelt.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}, y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = 0 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösung

a) M_1 ist kein reeller Vektorraum, denn die Menge ist bzgl. der Addition nicht abgeschlossen.

b) M_2 ist kein reeller Vektorraum, denn die Menge ist bzgl. der Addition und der skalaren Multiplikation nicht abgeschlossen.

Aufgabe 5: Determinanten (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & x & -2x \\ -x & 1 & x \\ -4 & -1 & x \end{pmatrix}$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$.

b) Berechnen Sie $\det\left(-\mathbf{2A} + \mathbf{A}\right)$ und $\det\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}$ für $x = 2$. Falls Sie in Aufgabenteil a) zu keinem Ergebnis gekommen sind, so nehmen Sie $\det(\mathbf{A}) = -20$ an.

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{A}$ nicht invertierbar?

Lösung:

a) Die Determinante lautet:

$$\det(\mathbf{A}) = x^3 - 6x^2 - 4x$$

b) Für $x = 2$ ist $\det(\mathbf{A}) = -24$. Es gilt:

$$\det\left(-\mathbf{2A} + \mathbf{A}\right) = 24$$
$$\det\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = -\frac{1}{24}$$

c) Die Matrix $\mathbf{A}$ ist für $x_1 = 0$ oder $x_{2/3} = 3 \pm \sqrt{13}$ nicht invertierbar.

Aufgabe 6: Inverse Matrizen (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ -3 & 2 & -a \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \mathbb{R}.$$

a) Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{A}$ singulär?

b) Bestimmen Sie für $a = 1$ die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$.

Lösung

a) Für $a = -\frac{1}{2}$ ist $\det(\mathbf{A}) = 0$ und $\mathbf{A}$ somit singulär.

b) Sei $a = 1$. Mit dem Gaussschen Algorithmus erhält man für die Inverse:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Orthogonale Matrizen (10 Punkte)

Zeigen Sie auf zwei verschiedene Arten, dass die Matrix $\mathbf{A}$ orthogonal ist.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung 1. Es muss gelten: $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$
Lösung 2. Zu zeigen: Die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ sind paarweise orthogonal zueinander und haben jeweils die Länge 1.

Aufgabe 8: Lineares Gleichungssystem (10 Punkte)

Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & + \; x_2 & + & 2x_3 & = \; 5 \\ 2x_1 & +4x_2 & + & s^2x_3 & = -1 \\ 3x_1 & +7x_2 & + & (s-1)x_3 & = \; t \end{array}$$

Für welche Kombinationen von $s,t \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

Lösung

a) Zur Lösung des Gleichungssystems wird hier der Gausssche Algorithmus verwendet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & s^2 & -1 \\ 3 & 7 & s-1 & t \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 4-s^2 & 11 \\ 0 & -4 & 7-s & 15-t \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') = (1) \\ (2') = 2 \cdot (1) - (2) \\ (3') = 3 \cdot (1) - (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 4-s^2 & 11 \\ 0 & 0 & -2s^2+s+1 & 7+t \end{array}\right) \begin{array}{l} (1'') = (1') \\ (2'') = (2') \\ (3'') = 2 \cdot (2'') - (3') \end{array}$$

Fallunterscheidung

Fall 1: Für $s = 1$ und $t = -7$ oder $s = -\frac{1}{2}$ und $t = -7$ besitzt das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Fall 2: Für $s = 1$ und $t \neq -7$ oder $s = -\frac{1}{2}$ und $t \neq -7$ besitzt das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Fall 3: Für $s \neq 1$ und $t \in \mathbb{R}$ oder $s \neq -\frac{1}{2}$ und $t \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung.

Aufgabe 9: Eigenwerte und Eigenvektoren (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & c^2 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 2c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } c \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von c.

b) Bestimmen Sie für $c = 1$ die zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$.

Lösung:

a) Die Eigenwerte lauten:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= c \end{aligned}$$

b) Die Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ ist durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \middle| \mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

gegeben.