Mathematik für Betriebswirte I
(Lineare Algebra)

2. Klausur Wintersemester 2016/2017 20.03.2017

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 11 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: Aussagenlogik - Mengenlehre (10 Punkte)

Aufgabe 1.1.

Prüfen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob es sich bei der folgenden Aussage

$$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)) \Rightarrow (\neg A)$$

um eine Tautologie, eine Kontradiktion oder eine Kontingenz handelt.

Aufgabe 1.2.

Widerlegen Sie die folgende Gleichung für drei Mengen A, B und C mit Hilfe eines Gegenbeispiels:

$$(A \backslash (B \cup C)) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

Lösung 1.1: Es handelt sich um eine Tautologie.
Lösung 1.2: Seien beispielsweise $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ und $C = \{a, c\}$.
Dann ist $(A \backslash (B \cup C) = \{\ \} \neq (A \backslash B) \cup (A \backslash C) = \{a, b\}$.

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen (10 Punkte)

Aufgabe 2.1.

Gegeben sei die komplexe Zahl

$$z = 2\sqrt{3} + 2i$$

in algebraischer Form. Geben Sie z in trigonometrischer und exponentieller Darstellung an.

Aufgabe 2.2.

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass der Ausdruck

$$\frac{4-6i}{2+ai}$$

eine reelle Zahl ist, und geben Sie diese Zahl explizit an.

Lösung 2.1: Es gilt:

$$\begin{aligned} r &= 4 \\ x &= \frac{1}{6}\pi \end{aligned}$$

Die trigonometrische Darstellung ergibt sich damit zu:

$$z = 4\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + 4i \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)$$

Die exponentielle Darstellung kann angegeben werden zu:

$$z = 4e^{i \cdot \frac{1}{6}\pi}$$

Lösung 2.2: Es gilt:

$$\frac{4-6i}{2+ai} = \frac{8-6a-i(4a+12)}{4+a^2}$$

Der Ausdruck ist für $a = -3$ reell und beträgt 2.

Aufgabe 3: Surjektivität und Injektivität (10 Punkte)

Gegeben sei die folgende Abbildung mit nicht leeren Mengen D und E:

$$f : D \to E$$
$$x \mapsto f(x) = 3x^2 + 9$$

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f für $D = E = \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie D und E derart, dass f bijektiv ist.

c) Bestimmen Sie für den bijektiven Fall die Umkehrfunktion von f.

Lösung

b) Für beispielsweise $D = [0, \infty)$ und $E = [9, \infty)$ ist f bijektiv.

c) Die Umkehrfunktion für $D = [9, \infty)$ und $E = [0, \infty)$ lautet:

$$f^{-1} : E \to D$$
$$x \mapsto f(x)^{-1} = \sqrt{\tfrac{x}{3} - 3}$$

Aufgabe 4: Lineare Unterräume (10 Punkte)

Prüfen Sie folgende Mengen auf Abgeschlossenheit bzgl. der Addition und skalaren Multiplikation. Bestimmen Sie, ob es sich bei den Mengen um reelle Vektorräume handelt.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 = y^2 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R}, x + y + z = 0 \right\}$$

Lösung

a) M_1 ist kein reeller Vektorraum, denn die Menge ist bzgl. der Addition nicht abgeschlossen.

b) M_2 ist ein reeller Vektorraum, denn die Menge ist bzgl. der Addition und der skalaren Multiplikation abgeschlossen. Es gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}_{\in M_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}_{\in M_2} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \in M_2$$

Denn es gilt:
$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = \underbrace{x_1 + y_1 + z_1}_{=0} + \underbrace{x_2 + y_2 + z_2}_{=0} = 0$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\lambda \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in M_2} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \in M_2$$

Denn es gilt: $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(\underbrace{x + y + z}_{=0}) = 0$

Aufgabe 5: Vollständige Induktion (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 2$ die Produktgleichung

$$\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

gilt. Ist die Gleichung auch für $n = 1$ gültig?

Lösung: Induktionsanfang ($n = 2$):

$$\prod_{i=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$$

Induktionsschluss ($n \mapsto n+1$):
Zu zeigen ist:

$$\prod_{i=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) &= \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{n+1}{2n} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{n+2}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

Die Gleichung gilt auch für $n = 1$, da das Produkt über eine leere Indexmenge per Definition 1 ist.

Aufgabe 6: Determinanten (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & a & -a & -2 \\ -1 & a & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von a.

b) Berechnen Sie $\det\left(-\mathbf{A^3}\right)$ und $\det\left(\mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T\right)^{-1}$ für $a = 1$. Falls Sie in Aufgabenteil a) zu keinem Ergebnis gekommen sind, so nehmen Sie $\det(\mathbf{A}) = -3$ an.

c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{A}$ singulär?

Lösung:

a) Die Determinante lautet:

$$\det(\mathbf{A}) = 10a^2 - 16a - 2$$

b) Für $a = 1$ ist $\det(\mathbf{A}) = -8$. Es gilt:

$$\det\left(-\mathbf{A^3}\right) = 512$$
$$\det\left(\mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T\right)^{-1} = -\frac{1}{128}$$

c) Die Matrix $\mathbf{A}$ ist für $a_{1/2} = \frac{4}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{21}$ singulär.

Aufgabe 7: Inverse einer Matrix (10 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} t & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ t & 0 & t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie **AB**.

b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix **B** die inverse Matrix von **A**? Geben Sie die Inverse an.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = (-1, 2, 1)^T$.

Lösung

a)

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9t-8 & 0 & -6+6t \\ 4t-4 & 1 & -3+3t \\ -8t+8 & 0 & 6-5t \end{pmatrix}$$

b) Ansatz: $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$

$$\begin{pmatrix} 9t-8 & 0 & -6+6t \\ 4t-4 & 1 & -3+3t \\ -8t+8 & 0 & 6-5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist für $t = 1$ die Matrix **B** die Inverse von **A**.

Für die Inverse von **A** ergibt sich:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Aus Aufgabenteil b) und aus $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ergibt sich $\mathbf{x} = \mathbf{Bb}$. Dadurch erhält man:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Lineares Gleichungssystem (10 Punkte)

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & 4x_2 & +ax_3 & =5 \\ 3x_1 & + & (a+5)x_2 & + \ x_3 & =7 \\ x_1 & + & 2x_2 & +ax_3 & =3 \end{array}$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

b) Bestimmen Sie für $a = 2$ die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems.

Lösung

a) Zur Lösung des Gleichungssystems wird hier der Gausssche Algorithmus verwendet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & a & 5 \\ 3 & a+5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & a & 5 \\ 0 & 2-2a & 3a-2 & 1 \\ 0 & 0 & -a & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1') = (1) \\ (2') = 3(1) - 2 \cdot (2) \\ (3') = (1) - 2 \cdot (3) \end{array}$$

Fallunterscheidung
Fall 1: Für $a = 0$ besitzt das Lineare Gleichungssystem keine Lösung.
Fall 2: Für $a \neq 0$ und $a \neq 1$ besitzt das Lineare Gleichungssystem genau eine Lösung.
Fall 3: Für $a = 1$ besitzt das Lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

b) Die Lösungsmenge ist:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 9: Quadratische Formen (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die zu $\mathbf{A}$ gehörige quadratische Form $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$.

b) Bestimmen Sie die Hauptunterdeterminanten von $\mathbf{A}$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{A}$ positiv definit?

c) Sei $a = \frac{5}{2}$. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Geben Sie auf Basis Ihrer Ergebnisse (d.h. ohne Rechnung) die Determinante von A an und begründen Sie, ob die Matrix invertierbar ist oder nicht.

Lösung:

a) Es gilt:

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

b) Die Hauptunterdeterminanten lauten:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{H}_1) &= \quad 2 \quad &> 0 \\ \det(\mathbf{H}_2) &= \quad 4 \quad &> 0 \\ \det(\mathbf{H}_3) &= 4a - 10 & \end{aligned}$$

Für $a > \frac{5}{2}$ ist die Matrix $\mathbf{A}$ positiv definit.

c) Das charakteristische Polynom $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ der Matrix $\mathbf{A}$ ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & \frac{5}{2}-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{13}{2}\lambda + 9\right) \end{aligned}$$

Aus $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ folgt:

$$-\lambda\left(\lambda^2 - \frac{13}{2}\lambda + 9\right) = 0$$

Somit sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{9}{2}$ und $\lambda_3 = 2$ Eigenwerte von $\mathbf{A}$. Da ein Eigenwert gleich 0 ist, ist die Determinante von A ebenfalls gleich 0 und damit die Matrix nicht invertierbar.