Mathematik für Betriebswirte I
(Lineare Algebra)

1. Klausur Wintersemester 2017/2018 16.02.2018

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 12 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: Mengenlehre (10 Punkte)

1. Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} B \cap C &= \{3, 7\} \\ \overline{A \cup B \cup C} &= \{10\} \\ A &= \{1, 2, 3\} \\ B \backslash C &= \{4, 5, 6\} \end{aligned}$$

   Desweiteren gilt $C \subseteq B$. Bestimmen Sie die Mengen
   B, C, $B \backslash A$, $B \cup C$ und die Grundmenge Ω.

2. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die folgende Gleichung für drei Mengen M, N und O nicht stets erfüllt ist.

$$M \backslash (N \cup O) = (M \backslash N) \cup (M \backslash O)$$

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen (10 Punkte)

1. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

   a) $\frac{\overline{1-i}}{3} + \frac{\bar{i}}{12} - \frac{1-3i}{4}$

   b) $\frac{\left(\overline{2i+1}\right)^2}{4} \cdot \frac{4i+2}{\frac{1}{2}-i}$

2. Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Lösungen der folgenden Gleichung:

$$-3z^2 - 300 = 48z$$

Aufgabe 3: Vollständige Induktion (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

gilt.

Aufgabe 4: Konvexe Mengen (10 Punkte)

Folgende Teilmengen M_1 und M_2 des $\mathbb{R}^2$ seien gegeben:

$$M_1 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, y \leq -|x| - 3\}$$
$$M_2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, y \geq -(x+2)^2\}$$

Skizzieren Sie jede dieser zwei Mengen und untersuchen Sie sie auf Konvexität. Begründen Sie jeweils Ihr Ergebnis. Geben Sie zusätzlich für jede nicht konvexe Menge explizit eine Konvexkombination an, die nicht in dieser Menge liegt, und zeichnen Sie diese in Ihrer Skizze ein.

Aufgabe 5: Determinanten (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & x & 0 & 1 \\ -x & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -x \\ -1 & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

mit $x \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass für die Determinante der Matrix **A** gilt: $\det(\mathbf{A}) = (2x^2 + 1)^2$

b) Für welche $x \in \mathbb{C}$ ist die Matrix **A** regulär?

Aufgabe 6: Inverse Matrizen (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 2 & 2 & a \\ -a & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\det(\mathbf{A}) = (2a+1)(-2a-2)$ und $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie a derart, dass $\mathbf{A}$ symmetrisch ist.

b) Bestimmen Sie a derart, dass $\mathbf{A}$ nicht invertierbar ist.

c) Bestimmen Sie für $a = 0$ die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$

Aufgabe 7: Definitheitseigenschaften von Matrizen (10 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Definitheitseigenschaften der Matrix $\mathbf{A}$ über ihre Eigenwerte.

b) Bestimmen Sie die Definitheitseigenschaften der Matrix $\mathbf{B}$ über ihre Hauptunterdeterminanten. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{B}$ positiv bzw. negativ definit?

Aufgabe 8: Lineares Gleichungssystem (10 Punkte)

Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcr} -3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 7 \\ 4x_1 & -6x_2 & +8x_3 & = & a \\ -2x_1 & +2x_2 & +bx_3 & = & 10 \end{array}$$

Für welche Kombinationen von $a,b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 9: Eigenwerte und Eigenvektoren (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda(2+\lambda)(1+\lambda).$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.

b) Berechnen Sie zum kleinsten Eigenwert alle zugehörigen Eigenvektoren.
