Mathematik für Betriebswirte I
(Lineare Algebra)

1. Klausur **Wintersemester 2017/2018** **16.02.2018**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname:...

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 10 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: Mengenlehre (10 Punkte)

1. Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} B \cap C &= \{3, 7\} \\ \overline{A \cup B \cup C} &= \{10\} \\ A &= \{1, 2, 3\} \\ B \backslash C &= \{4, 5, 6\} \end{aligned}$$

   Desweiteren gilt $C \subseteq B$. Bestimmen Sie die Mengen

   B, C, $B \backslash A$, $B \cup C$ und die Grundmenge Ω.

2. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die folgende Gleichung für drei Mengen M, N und O nicht stets erfüllt ist.

$$M \backslash (N \cup O) = (M \backslash N) \cup (M \backslash O)$$

Lösung

1. $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
   $C = \{3, 7\}$
   $B \backslash A = \{4, 5, 6, 7\}$
   $B \cup C = B$
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$

2. Gegenbeispiel:
   Seien $M = \{1, 2\}$, $N = \{2, 3\}$ und $O = \{1, 3\}$, dann gilt:

$$M \backslash (N \cup O) = \{\ \} \neq (M \backslash N) \cup (M \backslash O) = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$$

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen (10 Punkte)

1. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

   a) $\frac{\overline{1-i}}{3} + \frac{\bar{i}}{12} - \frac{1-3i}{4}$

   b) $\frac{\left(\overline{2i+1}\right)^2}{4} \cdot \frac{4i+2}{\frac{1}{2}-i}$

2. Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Lösungen der folgenden Gleichung:

$$-3z^2 - 300 = 48z$$

Lösung:

1.a)

$$\frac{\overline{1-i}}{3} + \frac{\bar{i}}{12} - \frac{1-3i}{4} = \frac{1}{12} + i$$

1.b)

$$\frac{\left(\overline{2i+1}\right)^2}{4} \cdot \frac{4i+2}{\frac{1}{2}-i} = 5$$

2. Mit der p-q-Formel ergibt sich:

$$z_{1/2} = -8 \pm 6i$$

Aufgabe 3: Vollständige Induktion (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

gilt.

Lösung: Induktionsanfang ($n = 1$):

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$$

Induktionsschluss ($n \mapsto n+1$):
Zu zeigen ist:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{2^i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 4: Konvexe Mengen (10 Punkte)

Folgende Teilmengen M_1 und M_2 des $\mathbb{R}^2$ seien gegeben:

$$M_1 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}, y \leq -|x| - 3\}$$
$$M_2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}, y \geq -(x + 2)^2\}$$

Skizzieren Sie jede dieser zwei Mengen und untersuchen Sie sie auf Konvexität. Begründen Sie jeweils Ihr Ergebnis. Geben Sie zusätzlich für jede nicht konvexe Menge explizit eine Konvexkombination an, die nicht in dieser Menge liegt, und zeichnen Sie diese in Ihrer Skizze ein.

Lösung:

M_1: Die Menge M_1 ist konvex.

M_2: Die Menge M_2 ist nicht konvex.

Aufgabe 5: Determinanten (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & x & 0 & 1 \\ -x & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -x \\ -1 & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

mit $x \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass für die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$ gilt: $\det(\mathbf{A}) = (2x^2 + 1)^2$

b) Für welche $x \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $\mathbf{A}$ regulär?

Lösung:

a)

$$\det(\mathbf{A}) = (2x^2 + 1)^2$$

b) Die Matrix $\mathbf{A}$ ist für alle $x \in \mathbb{C} \backslash \left\{ -i\sqrt{\frac{1}{2}}, i\sqrt{\frac{1}{2}} \right\}$ regulär.

Aufgabe 6: Inverse Matrizen (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 2 & 2 & a \\ -a & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $\det(\mathbf{A}) = (2a+1)(-2a-2)$ und $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie a derart, dass $\mathbf{A}$ symmetrisch ist.

b) Bestimmen Sie a derart, dass $\mathbf{A}$ nicht invertierbar ist.

c) Bestimmen Sie für $a = 0$ die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$

Lösung

a) (Für $a = 2$ ist die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch.

b) Für $a = -\frac{1}{2}$ und $a = -1$ ist die Matrix $\mathbf{A}$ nicht invertierbar.

c) Sei $a = 0$. Mit dem Gaussschen Algorithmus erhält man für die Inverse von $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Definitheitseigenschaften von Matrizen (10 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Definitheitseigenschaften der Matrix $\mathbf{A}$ über ihre Eigenwerte.

b) Bestimmen Sie die Definitheitseigenschaften der Matrix $\mathbf{B}$ über ihre Hauptunterdeterminanten. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{B}$ positiv bzw. negativ definit?

Lösung:

a) Die Matrix $\mathbf{A}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 2,5 + \sqrt{11,25} > 0$ und $\lambda_2 = 2,5 - \sqrt{11,25} < 0$, somit ist $\mathbf{A}$ indefinit.

b) Für $a > \frac{1}{2}$ ist die Matrix $\mathbf{B}$ positiv definit. Für $a < \frac{1}{2}$ indefinit.

Aufgabe 8: Lineares Gleichungssystem (10 Punkte)

Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcr} -3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 7 \\ 4x_1 & -6x_2 & +8x_3 & = & a \\ -2x_1 & +2x_2 & +bx_3 & = & 10 \end{array}$$

Für welche Kombinationen von $a,b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

Lösung
Fallunterscheidung

Fall 1: Für $a = -36$ und $b = -\frac{4}{5}$ besitzt das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Fall 2: Für $a \neq -36$ und $b = -\frac{4}{5}$ besitzt das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Fall 3: Für $a \in \mathbb{R}$ und $b \neq -\frac{4}{5}$ besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung.

Aufgabe 9: Eigenwerte und Eigenvektoren (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda(2+\lambda)(1+\lambda).$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.

b) Berechnen Sie zum kleinsten Eigenwert alle zugehörigen Eigenvektoren.

Lösung:

a) $S = \{-2, -1, 0\}$

b) Die Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = -2$ ist durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \mathbf{v} = t \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

gegeben.