Mathematik für Betriebswirte I
(Lineare Algebra)

2. Klausur **Wintersemester 2017/2018** **16.03.2018**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name des Tutors: ....

Vorkurs Mathematik besucht? Ja Nein

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 10 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	10	
2	10	
3	10	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1: Aussagenlogik (10 Punkte)

Prüfen Sie, ob es sich bei der folgenden Aussage um eine Tautologie, eine Kontradiktion oder eine Kontingenz handelt:

$$(A \wedge B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$$

Lösung:
Es handelt es sich bei der gegebenen Aussage um eine Tautologie.

Aufgabe 2: Vollständige Induktion (10 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt.

Lösung: Induktionsanfang ($n = 1$):

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

(Induktionsschluss ($n \mapsto n+1$):
Zu zeigen ist:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 3: Surjektivität und Injektivität (10 Punkte)

Gegeben sei die folgende Abbildung mit nicht leeren Mengen M und N:

$$f : M \to N$$
$$x \mapsto f(x) = 2x^2 - 8$$

Bestimmen Sie die Mengen M und N so, dass

1. a) f weder injektiv noch surjektiv ist,
   b) f injektiv, aber nicht surjektiv ist,
   c) f surjektiv, aber nicht injektiv ist,
   d) f bijektiv ist.
2. Wie würden sich die Antworten aus Aufgabenteil 1 für die Abbildung $g : M \to N, x \mapsto g(x) = -2x^2 - 8$ ändern?

Lösung:

1. Zum Beispiel:
   a) $M = \mathbb{R}$ und $N = \mathbb{R}$
   b) $M = \mathbb{R}_+$ und $N = \mathbb{R}$
   c) $M = \mathbb{R}$ und $N = [-8, \infty)$
   d) $M = \mathbb{R}_+$ und $N = [-8, \infty)$
2. zu 1a) Keine Änderung.
   zu 1b) Keine Änderung.
   zu 1c) $M = \mathbb{R}$ und $N = (-\infty, -8]$
   zu 1d) $M = \mathbb{R}_+$ und $N = (-\infty, -8]$

Aufgabe 4: Komplexe Zahlen (10 Punkte)

Gegeben sei die komplexe Zahl

$$z = 2 + 2i$$

in algebraischer Form.

a) Geben Sie z in trigonometrischer und exponentieller Darstellung an.

b) Berechnen Sie z^4 und geben Sie z^4 in algebraischer, trigonometrischer und exponentieller Darstellung an.

Lösung:

a) Die trigonometrische Darstellung ergibt sich zu:

$$z = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Die exponentielle Darstellung kann angegeben werden zu:

$$z = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

b) Die exponentielle Darstellung lautet:

$$z^4 = 64e^{\pi i}$$

Mit $r = 64$ und $x = \pi$ ergibt sich für die trigonometrische und algebraische Darstellung:

$$\begin{aligned} z^4 &= 64\cos(\pi) + i64\sin(\pi) \\ &= -64 \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Inverse Matrizen (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = (1, 2, -1)^T$.

---

a) Die Inverse ist gegeben durch:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & -3 & 5 \\ 5 & 1 & -2 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Die Lösungsmenge lautet:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -25 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 6: Lineare Unterräume (10 Punkte)

Prüfen Sie, ob es sich bei M_1 und M_2 um lineare Unterräume des $\mathbb{R}^3$ handelt:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R}, y = x, z = -x \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R}, x < y < z \right\}$$

Lösung:

- M_1 ist bzgl. der Addition und der skalaren Multiplikation abgeschlossen, weshalb es sich um einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ handelt.

- Da M_2 bzgl. der skalaren Multiplikation nicht abgeschlossen ist, handelt es sich bei M_2 um keinen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7: Quadratische Formen (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 10 \\ 8 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

sowie ihr Spektrum $S = \{-18, -9, 9\}$.

a) Bestimmen Sie die zu $\mathbf{A}$ gehörige quadratische Form $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$.

b) Bestimmen Sie die Definitheitseigenschaft von $\mathbf{A}$ über ihre Hauptunterdeterminanten und über ihre Eigenwerte.

c) Begründen Sie kurz, ob die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ linear abhängig sind.

Lösung:

a) Es gilt:

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = -11x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 16x_1x_3 + 20x_2x_3$$

b) $\mathbf{A}$ ist indefinit.

c) Nein, die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 8: Lineares Gleichungssystem (10 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1+b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2-b \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche $b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen?

b) Geben Sie den zugehörigen Nullraum für $b = 0$ an.

Lösung

a) Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} b &= 1 && \Rightarrow \text{Unendlich viele Lösungen} \\ b &= -1 && \Rightarrow \text{Keine Lösung} \\ b \neq 1, b &\neq -1 && \Rightarrow \text{Genau eine Lösung} \end{aligned}$$

b) Die Lösungsmenge des homogenen Systems gegeben durch:

$$\mathbb{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 9: Eigenwerte und Eigenvektoren (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.

b) Bestimmen Sie zum Eigenvektor $\mathbf{v} = (2, 1, -8)^T$ den zugehörigen Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$.

c) Geben Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$ an und begründen Sie kurz, ob die Matrix $\mathbf{A}$ den vollen Rang hat.

Lösung:

a) Die Eigenwerte lauten:

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = -5$$

b) Der zugehörige Eigenwert lautet $\lambda_3 = -5$.

c) Für die Determinante gilt $\det(\mathbf{A}) = 0$, daher bestitz die Matrix $\mathbf{A}$ nicht den vollen Rang.