Mathematik für Betriebswirte I
(Lineare Algebra)

1. Klausur **Wintersemester 2022/23** **16.02.2023**

BITTE LESERLICH IN **DRUCKBUCHSTABEN** AUSFÜLLEN

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnummer: | | | | | | | |

Studienfach: ....

Name der Tutorin/des Tutors: ....

Unterschrift der/des Studierenden:

Überprüfen Sie die Klausur auf Vollständigkeit, sie besteht aus 10 Seiten.

Bemerkungen:

Aufgabe	**max. Pkt.**	**err. Pkt.**
1	8	
2	9	
3	10	
4	10	
5	7	
6	11	
7	10	
8	15	
9	10	
Summe	**90**	
Note		

Aufgabe 1 (8 Punkte):

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

gilt.

Aufgabe 2 (9 Punkte):

Bestimmen Sie die Lösungen $z_{1,2} \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$-2z^2 + 8z - 26 = 0$$

und berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1)$$

Lösung:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 2 - 3i$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 13 \\ \frac{z_1 + z_2}{2} &= 2 \\ |z_1| \cdot |z_2| &= 13 \\ \arg(z_1) &= \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \approx 56{,}31 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| z = 1 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x + z = 0 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \right\}$$

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| 2x = y \right\}$$

a) Begründen Sie, ob die Mengen M_1 und M_2 lineare Unterräume des $\mathbb{R}^3$ sind.

b) Skizzieren Sie die Menge M_3 und begründen Sie, ob es sich um eine konvexe Menge handelt.

c) Begründen Sie, ob die Menge M_4 eine transitive Relation darstellt.

Lösung:

a) M_1 ist weder bzgl. Addition noch skalarer Multiplikation abgeschlossen und damit kein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^3$.
M_2 ist bzgl. Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen und damit ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

b) M_3 ist konvex.

c) M_4 ist keine transitive Relation.

Aufgabe 4 (10 Punkte):

Gegeben seien die folgenden Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & x+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2x & 5x-1 \\ 3 & 2x-3 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$?

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\det(\mathbf{A}) = 2$?

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{A}$ singulär?

Lösung:

a)

$$x = 2$$

b) Es gilt:

$$\det(\mathbf{A}) = 1 - x$$

Somit gilt $\det(\mathbf{A}) = 2$ für $x = -1$.

c) Für $x = 1$ gilt $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 1$ und damit ist $\mathbf{A}$ singulär.

Aufgabe 5 (7 Punkte):

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & b & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2b & 0 & 4 & 7 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 19 & \frac{b}{4} \\ b^3 & 8 & 3 & 1 & 5b^4 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Für welche $b \in \mathbb{R}$ sind die Zeilen und Spalten der Matrix $\mathbf{A}$ linear abhängig?

Lösung: Die Zeilen und Spalten sind linear abhängig für $b = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 6 (11 Punkte):

Gegeben seien die folgenden Matrizen **A** und **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Überprüfen Sie, ob die Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie ggf. ihre Inverse.

Lösung: Die Inverse ist

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{B}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} \text{ ist nicht invertierbar.}$$

Aufgabe 7 (10 Punkte):

Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

a) Begründen Sie, für welches $a \in \mathbb{R}$ das Lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen besitzt.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Linearen Gleichungsystems für $a = 2$.

Lösung:

a) **Fallunterscheidung**:

1. Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Das LGS ist also für alle $a \in \mathbb{R}$ lösbar.

2. Für $a = 6$ gilt $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2 < 3 = n$. Das LGS besitzt also unendlich viele Lösungen.

3. Für $a \neq 6$ gilt $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 3 = n$. Das LGS besitzt also eine eindeutige Lösung.

b) Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 8 (15 Punkte):

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren zum kleinsten Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$.

b) Geben Sie den Kern der linearen Abbildung $f_{\mathbf{A}}$ an, welche von der Matrix $\mathbf{A}$ induziert wird, und begründen Sie, ob es sich um eine injektive Abbildung handelt.

Lösung:

a)

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 0$:

$$\mathbf{x} = a \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

b) Es gilt $\text{Kern}(f_{\mathbf{A}}) \neq \{\mathbf{0}\}$, somit ist die Abbildung $f_{\mathbf{A}}$ nicht injektiv.

Aufgabe 9 (10 Punkte):

Gegeben sei die folgende Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 5 \end{pmatrix},$$

sowie zwei ihrer Eigenvektoren

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{8} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{24}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die zu den Eigenvektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ gehörigen Eigenwerte λ_1 und λ_2.

b) Zeigen Sie, dass die beiden Eigenvektoren $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ orthonormal sind.

c) Begründen Sie, ob die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalisierbar ist und geben Sie ggf. ihre diagonalisierende Matrix $\mathbf{X}$ an.

d) Bestimmen Sie die Definitheit der Matrix $\mathbf{A}$.

e) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\mathbf{A}$.

Lösung:

a)

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7$$

b) Die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten sind stets orthogonal.

$$||\mathbf{x}_1|| = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = 1$$
$$||\mathbf{x}_2|| = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{24}} = 1$$

c) Da die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch ist, ist sie auch diagonalisierbar. Für ihre diagonalisierende Matrix $\mathbf{X}$ gilt:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{8}}{\sqrt{12}} & \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{24}} \\ \frac{2}{\sqrt{12}} & \frac{4}{\sqrt{24}} \end{pmatrix}$$

d) Da die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ positiv sind, ist sie positiv definit.

e) $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$