

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1

Aus früheren Untersuchungen ist bekannt, dass 0,1% einer Bevölkerung mit einem bestimmten Virus infiziert ist. Ein Bluttest auf diesen Virus habe folgende Eigenschaften:

- In 99% aller Fälle wird ein Infizierter als solcher erkannt (Bluttest „richtig positiv“).
- In 1% aller Fälle wird ein Nicht-Infizierter als Infizierter klassifiziert (Bluttest „falsch positiv“).

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine von diesem Bluttest als infiziert klassifizierte Person (Bluttest positiv) tatsächlich infiziert ist.

Aufgabe 2

Ein idealer Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 werde zweimal geworfen. Sind die drei Ereignisse

- A: Ungerade Augenzahl beim ersten Wurf
- B: Ungerade Augenzahl beim zweiten Wurf
- C: Ungerade Augensumme bei den beiden Würfeln

unabhängig voneinander?

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X sei poissonverteilt mit dem positiven reellen Parameter a ($X \sim \text{Po}(a)$), d.h. X nimmt ausschließlich nichtnegative ganzzahlige Werte an, und es gilt

$$P(X = i) = \frac{a^i}{i!} e^{-a} \quad (e: \text{Eulersche Zahl}; i = 0, 1, 2, \dots).$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .

Aufgabe 4

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den reellen Parametern μ und $\sigma^2 > 0$ ($X \sim N(\mu; \sigma^2)$). Berechnen Sie Erwartungswert, Varianz, Schiefe und Wölbung von X .

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n sollen eine Stichprobe aus einer beliebigen Grundgesamtheit X mit dem Erwartungswert μ darstellen, d.h. alle X_i ($i = 1, \dots, n$) haben dieselbe Verteilung wie X . Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad \text{mit } a_i \in \mathfrak{R} \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für μ ist.

Aufgabe 2

X_1, \dots, X_n sei eine unabhängige Zufallsstichprobe aus einer Grundgesamtheit X , d.h. X_1, \dots, X_n sind unabhängig und haben dieselbe Verteilung wie X . Bestimmen Sie jeweils die Maximum-Likelihood-Schätzfunktionen für die Parameter der folgenden Grundgesamtheiten X :

- X ist exponentialverteilt mit dem reellen Parameter $\lambda > 0$: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.
- X ist poissonverteilt mit dem reellen Parameter $a > 0$: $X \sim \text{Po}(a)$.
- X ist auf dem Intervall $[a, b]$ ($a, b \in \mathfrak{R}$ mit $a < b$) uniform verteilt, d.h.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b] \end{cases}$$

ist eine Dichtefunktion von X .

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

$X \sim N(\mu; \sigma^2)$ sei eine normalverteilte Grundgesamtheit mit bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$, und X_1, \dots, X_n sei eine unabhängige Zufallsstichprobe aus X . $\mu_0, \mu_1 \in \mathfrak{R}$ mit $\mu_0 < \mu_1$ seien gegeben.

- Bestimmen Sie zu gegebenem Signifikanzniveau α den besten Test der Nullhypothese $H_0: \mu = \mu_0$ gegen die Alternative $H_1: \mu = \mu_1$ mit Hilfe des Fundamentallemmas von Neyman und Pearson.
- Berechnen Sie die Testgröße T des Likelihood-Quotienten-Tests der Nullhypothese $H_0: \mu = \mu_0$ gegen die Alternative $H_1: \mu \neq \mu_0$ sowie die Null-Verteilung von $LQ := -2 \ln T$.

Aufgabe 2

Bei der Produktion von elektrischen Widerständen soll überwacht werden, ob der Erwartungswert die gewünschten $\mu_0 = 10$ Kiloohm einhält. Es sei bekannt, dass die einzelnen Messwerte im Fertigungsprozess einer Normalverteilung mit der Standardabweichung $\sigma = 0,5$ Kiloohm genügen. Dem Produktionsprozess werden stündlich Stichproben vom Umfang $n = 5$ entnommen, das arithmetische Mittel \bar{x} dieser fünf Werte berechnet und ein zweiseitiger Test der Hypothese $\mu = \mu_0$ durchgeführt. Wird die Nullhypothese zum Testniveau $\alpha = 0,05$ abgelehnt, so spricht man von einer Überschreitung der Warngrenzen und zieht eine weitere Stichprobe. Lehnt der gleiche Test sogar zum Niveau $\alpha = 0,01$ ab, so spricht man von einer Überschreitung der Alarmgrenzen und greift direkt in den Produktionsprozess ein.

- Formulieren Sie die beiden zugehörigen Tests.
- Welche Konsequenzen haben jeweils die folgenden Stichprobenergebnisse (in Kiloohm)?

$$\bar{x}_1 = 9,75, \quad \bar{x}_2 = 9,48, \quad \bar{x}_3 = 10,50, \quad \bar{x}_4 = 10,72$$

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

Beim Telefonieren unterliegt die Zeitdauer einer Gebühreneinheit gewissen Zufallsschwankungen, die als normalverteilt angesehen werden können. In einer Untersuchung wurden die Zeitdauern (in Sekunden) von 20 Gebühreneinheiten gemessen; es ergaben sich folgende Werte:

85	94	92	87	84	87	91	84	88	88
90	91	86	89	88	85	96	89	84	86

- Kann man die Behauptung der Telefongesellschaft, dass die mittlere Dauer einer Gebühreneinheit mindestens 90 Sekunden beträgt, auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ ablehnen?
- Geben Sie ein zweiseitiges symmetrisches Konfidenzintervall für die mittlere Dauer einer Gebühreneinheit zur Vertrauenswahrscheinlichkeit 95% an.

Aufgabe 2

Ein Angestellter steht unter dem Verdacht, dass seine Telefongespräche viel zu lange dauern. Sein Vorgesetzter überprüft die Dauer (in Minuten) der Telefongespräche dieses Angestellten anhand einer Zufallsstichprobe. Es ergaben sich folgende Werte:

35	20	18	13	17	14	5	16	28	17	23	30	19
----	----	----	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----

Kann man aufgrund dieses Stichprobenergebnisses auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ schließen, dass mehr als die Hälfte aller Gespräche dieses Angestellten länger als 15 Minuten dauern?

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

Im Rahmen einer arbeitspsychologischen Untersuchung waren zwei Bewertungsverfahren A und B für eine bestimmte Arbeitsleistung daraufhin zu prüfen, ob sie sich hinsichtlich ihrer Ergebnisse signifikant unterscheiden. Dazu wurde bei 10 Versuchspersonen die Ausführung einer bestimmten Arbeit jeweils nach jedem der beiden Verfahren bewertet:

Nr. der Versuchsperson	Punktzahl bei Verfahren A	Punktzahl bei Verfahren B
1	72	76
2	70	73
3	61	70
4	95	94
5	53	60
6	60	58
7	85	80
8	67	72
9	69	73
10	62	72

Formulieren Sie eine geeignete Nullhypothese und testen Sie sie mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%. Wenden Sie hierbei alle Testverfahren an, die dafür in Frage kommen und geben Sie jeweils die Voraussetzungen an, die ausreichend genau erfüllt sein müssen, um die Anwendung des betreffenden Testverfahrens zu gestatten.

Aufgabe 2

Die Maschinen 1 und 2 schneiden Draht auf eine Länge X_1 bzw. X_2 zurecht, wobei näherungsweise $X_1 \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$ gilt. Aus Erfahrung kennt man die beiden Standardabweichungen $\sigma_1 = 0,21$ cm und $\sigma_2 = 0,28$ cm. Eine Zufallsstichprobe aus X_1 vom Umfang $n_1 = 10$ ergibt das Stichprobenmittel $\bar{x}_1 = 12,49$ cm; eine Zufallsstichprobe aus X_2 vom Umfang $n_2 = 15$ ergibt $\bar{x}_2 = 12,54$ cm.

- Berechnen Sie zur Vertrauenswahrscheinlichkeit $\gamma = 0,95$ ein zweiseitiges symmetrisches Konfidenzintervall für die Differenz $\mu_1 - \mu_2$.
- Kann man auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ schließen, dass die Drahtlänge bei Maschine 2 im Mittel größer ist als bei Maschine 1?

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

An einer Straßenbaustelle wurden die Geschwindigkeiten (in $\frac{km}{h}$) von vorbeifahrenden Personenkraftwagen gemessen. Bei 14 Autos, die jeweils von einer Frau gelenkt wurden, ergab sich eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $\bar{v}_1 = 39$ bei einem Wert $s_1^2 = 27$ der Stichprobenvarianz. Bei 16 vorbeifahrenden Männern ergab sich die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}_2 = 43,5$ und $s_2^2 = 36$ als Wert der Stichprobenvarianz.

Kann man aus diesem Datenmaterial schließen, dass Frauen im Vergleich mit Männern an dieser Baustelle im Mittel vorsichtiger, d.h. mit einer geringeren Geschwindigkeit, vorbeifahren ($\alpha = 0,05$)? Machen Sie hierbei von geeigneten Verteilungsannahmen Gebrauch.

Aufgabe 2

Um die Fleischpreise in zwei Großstädten A und B miteinander zu vergleichen, wurde ein bestimmtes Fleischsortiment bei $n_1 = 8$ zufällig ausgewählten Fleischereien in A und bei $n_2 = 10$ zufällig ausgewählten Fleischereien in B eingekauft und der jeweilige Preis (in €) ermittelt.

Preise für das Sortiment in A:

22,10 24,60 23,90 19,45 23,00 20,50 23,35 23,70.

Preise für das Sortiment in B:

21,60 23,20 18,80 24,35 21,60 22,50 23,00 19,80 20,70 21,15.

Kann die Nullhypothese, dass sich die Fleischpreise in den beiden Städten nicht unterscheiden, auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ verworfen werden?

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

Um Aufschluss über den Verkaufserfolg eines neuen Konsumgutes zu erhalten, wurden in 10 Einzelhandelsgeschäften in ländlichen Gemeinden, in 9 Einzelhandelsgeschäften in Kleinstädten und in 7 Einzelhandelsgeschäften in Großstädten der Umsatz des Konsumgutes in einem bestimmten Zeitraum ermittelt:

Einzelhandelsgeschäft	Umsätze in 1000 EUR									
in ländlichen Gemeinden	5,6	7,4	7,3	6,4	7,5	6,1	6,6	6,0	5,5	5,5
in Kleinstädten	8,0	8,4	6,4	8,6	7,7	7,7	5,6	5,6	6,2	
in Großstädten	8,7	7,7	6,8	7,9	8,0	8,3	6,5			

Testen Sie mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% die Nullhypothese, dass sich der Verkaufserfolg des Konsumgutes in ländlichen Gemeinden, Kleinstädten und Großstädten nicht unterscheidet

- a) unter Verwendung einer geeigneten Normalverteilungsannahme,
- b) ohne diese Annahme.

Aufgabe 2

Um die Variation des Metallgehaltes in einer Erzlagerstätte zu untersuchen, werden aus sechs zufällig ausgewählten Bohrlöchern jeweils fünf Gesteinsproben entnommen und ihr Metallgehalt (in einer geeigneten Einheit) bestimmt:

Probe	Bohrloch					
	1	2	3	4	5	6
1	33,5	26,5	31,7	29,4	24,1	32,4
2	29,4	31,3	35,4	36,7	26,7	38,6
3	32,1	29,7	34,8	28,6	28,3	27,8
4	34,2	28,4	33,2	30,0	23,2	30,3
5	28,7	30,6	36,1	35,2	25,6	30,9

- a) Kann man die Nullhypothese, dass die Lagerstätte einen homogenen Metallgehalt aufweist, auf einem Signifikanzniveau von 2,5% ablehnen? Machen Sie hierbei von einer geeigneten Normalverteilungsannahme Gebrauch.
- b) Können Sie davon ausgehen, dass alle Beobachtungen unkorreliert sind? Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) Schätzen Sie die Streuung zwischen den Bohrlöchern und die Streuung innerhalb der Bohrlöcher mit Hilfe von erwartungstreuen Schätzfunktionen.

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1

Drei neugezüchtete Rebensorten werden in derselben Lage fünf Jahre lang probeweise angebaut. Unter anderem wird man die drei Sorten auch hinsichtlich des Zuckergehaltes vergleichen, den der Traubensaft bei normaler Lese enthält. Nach Ablauf der fünf Jahre hat man folgende Tabelle erhalten, die für die drei Sorten bei jedem der fünf Jahrgänge den Zuckergehalt in Grad Öchsle ausweist:

Sorte	Jahrgang				
	1	2	3	4	5
1	82	73	93	80	85
2	85	75	100	87	86
3	80	71	95	82	80

Man nehme für den Zuckergehalt von Traubensaft eine Normalverteilung an, deren Mittelwert einerseits vom Jahrgang, andererseits von der Rebensorte abhängt, ohne dass diese beiden Einflüsse ihrerseits voneinander abhängig wären. Die Streuung sei stets dieselbe. Mit Sicherheitswahrscheinlichkeit 95% teste man die Nullhypothese, wonach die Rebensorte keinen Einfluss auf den Zuckergehalt hat. Man teste diese Hypothese auch unter Verzicht auf die Normalverteilungsannahme.

Aufgabe 2

Es sei je eine Realisation der Zufallsvariablen Y_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2$) gegeben, wobei $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ gelten soll, mit dem unbekanntem Gesamtmittel μ , den unbekanntem Behandlungseffekten τ_i ($\sum_{i=1}^4 \tau_i = 0$), den unbekanntem Blockeffekten β_j ($\beta_1 + \beta_2 = 0$) und den unabhängigen Zufallsvariablen ε_{ij} mit der gleichen unbekanntem stetigen Verteilungsfunktion. Wie müssen die Realisationen y_{ij} ausgefallen sein, damit man mit größtmöglicher Sicherheitswahrscheinlichkeit die Nullhypothese $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$ mit Hilfe des Tests von Friedman ablehnen kann? Wie groß ist diese Sicherheitswahrscheinlichkeit?

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1

Spezialisieren Sie im multiplen linearen Regressionsmodell mit Normalverteilungsannahme die Formeln

- für die individuellen Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffizienten,
- für den Erwartungswert einer künftigen Beobachtung an einer gegebenen Stelle sowie
- für das Prognoseintervall für eine künftige Beobachtung an einer gegebenen Stelle

auf den Fall $k = 2$, d.h. auf den Fall eines Absolutgliedes und eines reellen Regressors. Hierbei sei γ die vorgegebene Konfidenzwahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2

In einer Untersuchung über die Auswirkung eines Düngemittels auf das Wachstum einer speziellen Pflanzensorte wurden Dreiergruppen von Jungpflanzen dieser Sorte mit einer Dosis von 1, 2, 3, ..., 10 Mengeneinheiten dieses Düngers bei sonst gleichen äußeren Bedingungen vier Wochen lang behandelt. Die Einteilung der Jungpflanzen auf die Gruppen erfolgte rein zufällig.

Die Resultate sind in folgender Tabelle wiedergegeben:

Dosis	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gewichtszunahme in g	722	1185	1250	1163	1247	1446	1601	1507	1672	1868
	807	1083	1386	1314	1327	1249	1714	1588	1769	1631
	637	1287	1114	1012	1167	1643	1488	1426	1575	2105

- a) Kann man, bei Annahme eines geeigneten Regressionsmodells, mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% schließen, dass die Gewichtszunahme durch größere Düngemittelbeigaben beschleunigt wird? Berechnen Sie auch das Bestimmtheitsmaß dieser Regression.
- b) Es wird behauptet, dass eine Mengeneinheit des Düngemittels eine durchschnittliche zusätzliche Gewichtszunahme von mindestens 150 g in der 4-Wochen-Periode bewirkt. Ist diese Behauptung mit den beobachteten Werten vereinbar?
- c) Mit welcher durchschnittlichen Gewichtszunahme in der 4-Wochen-Periode kann man rechnen, falls eine Dosis von 5,5 Mengeneinheiten verwendet wird? Geben Sie hierzu ein Intervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit 95% an. Beantworten Sie die entsprechende Frage, wenn es nicht um die durchschnittliche Gewichtszunahme, sondern um die Gewichtszunahme einer zufällig ausgewählten Jungpflanze geht.