Formelsammlung

Folgen und Reihen

Definitionen

Bezeichnung	Definition
Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$	$a: D \longrightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n := a(n)$ mit $D \subseteq \mathbb{N}_0$
n-te Partialsumme von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$	$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
Reihe	$(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Wichtige Folgen & Reihen

Bezeichnung	Explizite Folgendarstellung	Partialsumme
Arithmetische Folge mit $a_{n+1} - a_n = d \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$	$a_{n+1} = a_0 + (n+1)d$	$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(a_0+kd) = (n+1)\left(a_0 + \frac{nd}{2}\right)$
Geometrische Folge mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\,; q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$a_{n+1} = q^{n+1}a_0$	$s_n = a_0 \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ a_0(n+1) & q = 1 \end{cases}$

Eigenschaften einer Folge a_n mit $a, c \in \mathbb{R}$

Beschränkt	$\lvert a_n\rvert \leq c$	$\forall n \in \mathbb{N}_0$
Nach unten beschränkt	$a_n \geq c$	$\forall n \in \mathbb{N}_0$
Nach oben beschränkt	$a_n \leq c$	$\forall n \in \mathbb{N}_0$
Monoton wachsend	$a_n \leq a_{n+1}$	$\forall n \in \mathbb{N}_0$
Monoton fallend	$a_n \geq a_{n+1}$	$\forall n \in \mathbb{N}_0$
Konvergent mit Grenzwert a	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0: \quad \lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$	$\forall n \geq n_0$

Rechenregeln für konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $c \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^c = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^c = a^c$, falls $a_n > 0, a > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ca$
- $\lim\limits_{n\to\infty} c^{a_n} = c^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)} = c^a$, falls $c > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b_n \neq 0, b \neq 0$

Konvergenzkriterien für Reihen

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lvert a_k\rvert$ konvergent ist.

Konvergenzkriterium		
Quotientenkriterium	$\left\lvert \frac{a_{k+1}}{a_k} \right\rvert \leq q$	$0 < q < 1\,; a_k \neq 0\,; \forall k \geq k_0\,; k_0 \in \mathbb{N}_0$
Wurzelkriterium	$\sqrt[k]{\lvert a_k\rvert} \leq q$	$0 < q < 1\,; \forall k \geq k_0\,; k_0 \in \mathbb{N}_0$

Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Häufungspunkt und Grenzwert

Bezeichnung	Definition
Häufungspunkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** der Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele $\mathbf{x} \in D$ mit $\|\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\| < \varepsilon$ existieren.
Isolierter Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$	Ist $\mathbf{x}_0$ kein Häufungspunkt der Menge, aber gilt $\mathbf{x}_0 \in D$, dann wird $\mathbf{x}_0$ als **isolierter Punkt** bezeichnet.
Grenzwert $c \in \mathbb{R}$	Ist $\mathbf{x}_0$ ein Häufungspunkt, dann sagt man, dass die Funktion f für $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ gegen den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ **konvergiert**, wenn für jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\mathbf{x}_k \neq x_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ stets $\lim\limits_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = c$ gilt.

Stetigkeit

Bezeichnung	Definition
Stetigkeit	Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** an der Stelle $\mathbf{x}_0$, wenn $\mathbf{x}_0$ kein Häufungspunkt der Menge D ist oder falls $\mathbf{x}_0$ ein Häufungspunkt der Menge D ist und die Funktion f für $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ gegen den Grenzwert $f(\mathbf{x}_0)$ konvergiert, d.h. wenn $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ gilt.

Kurvendiskussion in $\mathbb{R}$

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige, geeignet oft differenzierbare Funktion, d.h. der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (**Differentialquotient**) existiert, sowie $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

Bezeichnung	Definition	Bedingungen
Supremum c von f	c ist die kleinste obere Schranke von f	
Infimum c von f	c ist die größte untere Schranke von f	
globale Minimalstelle x_0	$x_0 \in D$ mit $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in D$	$f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x) > 0$
globale Maximalstelle x_0	$x_0 \in D$ mit $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D$	$f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x) < 0$
lokale Minimalstelle x_0	$x_0 \in D$ mit $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in D \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|\|x - x_0\|\| < \varepsilon\}$	$f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) > 0$
lokale Maximalstelle x_0	$x_0 \in D$ mit $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in D \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|\|x - x_0\|\| < \varepsilon\}$	$f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) < 0$
Wendestelle x_0 konvex / konkav	$\exists \varepsilon > 0$ mit $f \in [x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng konvex und $f \in [x_0, x_0 - \varepsilon]$ streng konkav	$f''(x_0) = 0 \ \wedge \ f'''(x_0) < 0$
Wendestelle x_0 konkav / konvex	$\exists \varepsilon > 0$ mit $f \in [x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng konkav und $f \in [x_0, x_0 - \varepsilon]$ streng konvex	$f''(x_0) = 0 \ \wedge \ f'''(x_0) > 0$
Sattelstelle x_0		$f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) = 0$ $\wedge \ f'''(x_0) \neq 0$

Eigenschaften reeller Funktionen

Seien $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt:

Bedingung	Eigenschaft
falls f stetig bzw. differenzierbar an der Stelle $\mathbf{x_0}$	$f+g, f-g, fg$ und αf stetig bzw. differenzierbar an der Stelle $\mathbf{x_0}$
falls zusätzlich $g(\mathbf{x_0}) \neq 0$	$\frac{f}{g}$ stetig bzw. differenzierbar an der Stelle $\mathbf{x_0}$
falls zusätzlich $g(D_g) \subseteq D_f$ und g an der Stelle $\mathbf{x_0} \in D_g$ und f an der Stelle $\mathbf{y_0} = g(\mathbf{x_0})$ stetig bzw. differenzierbar	$f \circ g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $\mathbf{x_0}$ stetig bzw. differenzierbar
falls f streng monoton auf D_f	$f^{-1} : f(D_f) \to \mathbb{R}$ stetig

Rechenregeln für differenzierbare Funktionen

Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen, die an der Stelle $\mathbf{x_0}$ differenzierbar sind, und $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $(f+g)'(\mathbf{x_0}) = f'(\mathbf{x_0}) + g'(\mathbf{x_0})$
- $(f-g)'(\mathbf{x_0}) = f'(\mathbf{x_0}) - g'(\mathbf{x_0})$
- $(fg)'(\mathbf{x_0}) = f'(\mathbf{x_0})g(\mathbf{x_0}) + f(\mathbf{x_0})g'(\mathbf{x_0})$
- $(\alpha f)'(\mathbf{x_0}) = \alpha f'(\mathbf{x_0})$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(\mathbf{x_0}) = \frac{f'(\mathbf{x_0})g(\mathbf{x_0}) - f(\mathbf{x_0})g'(\mathbf{x_0})}{g^2(\mathbf{x_0})}$
- $(f \circ g)'(\mathbf{x_0}) = f'(g(\mathbf{x_0}))g'(\mathbf{x_0})$

Regeln von L'Hôspital

Die reellen Funktionen $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b)$ und der Grenzwert $\lim\limits_{x \uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiere im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne. Dann gilt:

Bedingung	$\lim\limits_{x\uparrow b} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow b} g(x) = 0$	Bedingung	$\lim\limits_{x\uparrow b} f(x) = \pm\infty \quad \lim\limits_{x\uparrow b} g(x) = \pm\infty$
Erste Regel	$\lim\limits_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	Zweite Regel	$\lim\limits_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Änderungsrate und Elastizität

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit $f(x_0) \neq 0$		$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $\mathbf{x_0}$ mit $f(\mathbf{x_0}) \neq \mathbf{0}$.	
Änderungsrate	$\rho_f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$	Partielle Änderungsrate	$\rho_{f,x_i}(\mathbf{x_0}) = \frac{\partial f(\mathbf{x_0})}{\partial x_i} \cdot \frac{1}{f(\mathbf{x_0})}$
Elastizität	$\varepsilon_f(x_0) = x_0 \cdot \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$	Partielle Elastizität	$\varepsilon_{f;x_i}(\mathbf{x_0}) = \frac{\partial f(\mathbf{x_0})}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(\mathbf{x_0})}$

Partielle Differentiation

Es sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf einer offenen Menge D, die geeignet oft partiell differenzierbar ist.

Bezeichnung	Definition
Partielle Differentiation	f heißt an der Stelle $\mathbf{x}$ bzgl. der i-ten Variablen x_i **partiell differenzierbar**, wenn der Grenzwert $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + \Delta x \cdot \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{\Delta x} =: \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$ existiert.
Gradient an der Stelle $\mathbf{x}$	$\text{grad} f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^T$
Stationäre Stelle $\mathbf{x_0}$	$\text{grad} f(\mathbf{x_0}) = 0$
Hesse-Matrix an der Stelle $\mathbf{x}$	$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$
Tangentialhyperebene	$t(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + \text{grad} f(\mathbf{x_0})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$
Totales Differential df an der Stelle $\mathbf{x_0}$	$df = \text{grad} f(\mathbf{x}_0)^T \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \, dx_i$

Implizite Funktion

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \times (a, b) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion mit

$$f(\mathbf{x}_0, y_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, y_0)}{\partial y} \neq 0.$$

Dann ist die implizite Funktion $g : U \to (a_0, b_0)$ stetig partiell differenzierbar und für ihre partiellen Ableitungen gilt

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\partial y}} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Optimierung

Es sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, $g_1, \ldots, g_k : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbare Funktionen und λ der Lagrange-Multiplikator.

Lagrange Funktion	$L(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{p=1}^{k} \lambda_p g_p(\mathbf{x})$
Optimierung **ohne Nebenbedingung**	$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = 0 \wedge \mathbf{H_f}(\mathbf{x_0})$ / $\mathbf{H_f}(\mathbf{x})$ negativ definit $\Rightarrow$ lokales / globales Maximum bei $\mathbf{x_0}$ $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = 0 \wedge \mathbf{H_f}(\mathbf{x_0})$ / $\mathbf{H_f}(\mathbf{x})$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales / globales Minimum bei $\mathbf{x_0}$
Optimierung **unter Gleichheitsnebenbedingungen** $g_p(\mathbf{x}) = 0$ für $p = 1, \ldots, k$	$\frac{\partial L(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mathbf{x}_0)}{\partial x_j} = 0 \wedge \mathbf{H_f}(\mathbf{x_0})$ / $\mathbf{H_f}(\mathbf{x})$ negativ definit $\Rightarrow$ lokales / globales Maximum bei $\mathbf{x_0}$ $\frac{\partial L(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mathbf{x}_0)}{\partial x_j} = 0 \wedge \mathbf{H_f}(\mathbf{x_0})$ / $\mathbf{H_f}(\mathbf{x})$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales / globales Minimum bei $\mathbf{x_0}$
Optimierung **unter Ungleichheitsnebenbedingungen** $\min \mathbf{f}(\mathbf{x})$ $g_p(\mathbf{x}) \leq 0$ für $p = 1, \ldots, k$ $\lambda_p \geq 0$ für $p = 1, \ldots, k$ $\lambda_p g_p(\mathbf{x}_0) = 0$ für $p = 1, \ldots, k$	$\frac{\partial L(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mathbf{x}_0)}{\partial x_j} = 0 \wedge \mathbf{H_f}(\mathbf{x_0})$ positiv definit $\Rightarrow$ globales Minimum bei $\mathbf{x_0}$

Approximationsverfahren

Taylor-Formel

Taylorpolynom n-ten Grades der Funktion f um den Entwicklungspunkt x_0:

$$T_{n;x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Der Approximationsfehler entspricht dem n-ten **Restglied**

$$R_{n;x_0}(x) = f(x) - T_{n;x_0}(x).$$

Newton-Verfahren und Sekantenverfahren

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

Newton-Verfahren	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit $f'(x_n) \neq 0$
Vereinfachtes Newton-Verfahren	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$ mit $f'(x_0) \neq 0$
Sekantenverfahren	$x_{n+1} = \dfrac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

Integration

Es sei die Riemann-integriebare Funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt:

Bezeichnung	Definition
Stammfunktion $F : [a; b] \to \mathbb{R}$	$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a; b]$
Bestimmtes Riemann-Integral	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
Unbestimmtes Riemann-Integral	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$
Uneigentliches Riemann-Integral 1. Art mit $f : [a; \infty) \to \mathbb{R}$	$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
Uneigentliches Riemann-Integral 2. Art mit $f : [a; b) \to \mathbb{R}$ mit $\lvert f(x)\rvert \to \infty$ für $x \uparrow b$	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{t\uparrow b} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$

Rechenregeln für Integrale mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \leq c \leq b$

$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$	$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c \alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x$
$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$	$\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } x = g(t)$

Riemann-Stieltjes-Integral

Es seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen.

Bezeichnung	Definition
Riemann-Stieltjes-Integral	$\int_a^b f(x)dg(x)$
Transformationssatz	Ist f Riemann-integrierbar und g stetig differenzierbar, dann ist f bzgl. g Riemann-Stieltjes-integrierbar und es gilt $\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$

Satz von Fubini

Die reellwertige Funktion $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \dots \right) \mathrm{d}x_n \\
&= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n
\end{aligned}$$

Ableitungen und Stammfunktionen elementarer Funktionen

$f(x) = F'(x)$	$F(x) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x$	Bemerkungen
a	$ax + C$	
x^c	$\frac{1}{c+1}x^{c+1} + C$	$\mathbb{R}$ für $c \in \mathbb{N}_0$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $c \in \{-2, -3, \dots\}$ $\mathbb{R}_+$ für $c > 0$ $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ für $c < 0$ mit $c \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
e^x	$e^x + C$	
e^{rx}	$\frac{1}{r}e^{rx} + C$	$r \neq 0$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + C$	$a > 0, a \neq 1$
$x^x(1 + \ln(x))$	$x^x + C$	$x > 0$
$\ln(x)$	$x(\ln(x) - 1) + C$	$x > 0$
$\log_a(x)$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln(x) - 1) + C$	$a > 0, x > 0$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\cot(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert + C$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$\lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	