Einführung in das Quantitative Risikomanagement
SS 2018

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg

Übungsaufgaben

Übungsaufgaben

Übungsaufgaben

1) Es sei
$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$
der beobachtete Schadendurchschnitt in einem Portfolio bestehend aus Privathaftpflichtversicherungsverträgen. Die Einzelschadenhöhen $Y_1, \ldots, Y_n$ seien unabhängig und identisch-verteilt mit $\mathbb{E}[Y_i] = \mu$, $\mathrm{Var}(Y_i) = \sigma^2$ und dem Variationskoeffizienten
$$\mathrm{Vko}(Y_i) := \frac{\sigma}{\mu} = 4.$$
Wie groß muss die Schadenanzahl n sein, damit mit einer Wahr- scheinlichkeit von 95% der beobachtete Schadendurchschnitt $\overline{Y}$ um weniger als $\delta = 10\%, 5\%, 3\%, 1\%$ von μ abweicht. Benutzen Sie zur (approximativen) Bestimmung von n den zentralen Grenzwertsatz.

2) (Sankt-Petersburg-Paradoxon) Die Zufallsvariable N gibt die Anzahl der benötigten Versuche an, bis beim Werfen einer fairen Münze zum ersten Mal „Kopf“ auftritt.
   a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion f_N von N.
   b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[N]$ und $\mathrm{Var}(N)$.
   c) Bestimmen Sie den Erwartungsnutzen von $X = 2^N$, wenn die Nutzenfunktion $u(x) = \ln(x)$ zugrunde gelegt wird.

Universität Hamburg DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungsaufgaben

3) Betrachtet wird ein Entscheidungsträger, der das Anfangskapital $K > 0$ investieren möchte und die Nutzenfunktion
$$u(x) = \sqrt{x} \qquad \text{für } x \geq 0$$
besitzt. Zur Auswahl stehen ihm zwei verschiedene Anlagealternativen a_1 und a_2, welche am Ende des Anlagezeitraums zum Endkapital KX_1 bzw. KX_2 führen, wobei X_1 und X_2 zwei mit den Parametern μ_1 und σ_1 bzw. μ_2 und σ_2 lognormal-verteilte Zufallsvariablen sind. D.h. X_1 und X_2 besitzen die Dichte
$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
für $i = 1, 2$.
   a) Weisen Sie nach, dass die Entscheidung zwischen den Anlagealternativen a_1 und a_2 von der Höhe des Anfangskapitals $K > 0$ unabhängig ist.
   b) Es gelte $\mu_1 = 0{,}09$, $\sigma_1 = 0{,}02$ und $\mu_2 = 0{,}08$. Für welche Werte von σ_2 wird der Entscheidungsträger die Anlagealternative a_2 wählen?

   Hinweis: Es gilt
$$\mathbb{E}[X_i^{1/2}] = \exp\left(\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{8}\sigma_i^2\right).$$

Universität Hamburg DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

c) Es sei nun angenommen, für die beiden Anlagealternativen a_1 und a_2 gilt

$$\mathbb{E}[KX_1] = \mathbb{E}[KX_2] \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}(KX_1) < \mathrm{Var}(KX_2).$$

Zeigen Sie, dass der Entscheidungsträger die Anlagealternative a_1 wählt, und interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Hinweis: Es gilt

$$\mathbb{E}[X_i] = \exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i]^2\left(e^{\sigma_i^2} - 1\right).$$

4) Zwei Entscheidungsträgern E_1 und E_2 wird ein Spiel X angeboten, das mit einer Wahrscheinlichkeit von 64% eine Auszahlung von 10 € und im anderen Fall keine Auszahlung liefert. Die beiden Entscheidungsträger E_1 und E_2 besitzen die Nutzenfunktionen

$$u_1(x) = 2x^2 + 5 \qquad \text{bzw.} \qquad u_2(x) = 4x^2 + 12.$$

a) Bestimmen Sie die Sicherheitsäquivalente $s_1(X)$ und $s_2(X)$ dieses Spiels für die Entscheidungsträger E_1 und E_2?
b) Erläutern Sie das Verhältnis der beiden Sicherheitsäquivalente $s_1(X)$ und $s_2(X)$?

Übungsaufgaben

5) Einem Entscheidungsträger mit der Nutzenfunktion

$$u(x) = -\frac{x^2}{100.000} + 2x$$

werden zwei Alternativen angeboten. Bei der ersten Alternative a_1 beträgt der Gewinn 20.000 € oder 40.000 € jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%. Bei der zweiten Alternative a_2 kommt jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% ein Gewinn von x € oder 0 € zur Auszahlung. Wie hoch muss bei der zweiten Alternative der Gewinn x sein, damit der Entscheidungsträger zwischen den beiden Alternativen indifferent ist?

6) Betrachtet wird ein Versicherungsnehmer mit der Nutzenfunktion

$$u(x) = k\ln(x) \qquad \text{für } x > 0 \;\text{ und }\; k > 0$$

und dem Anfangsvermögen $v_0 > 1$, der dem Risiko gegenübersteht, einen auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilten Versicherungsschaden X zu erleiden. D.h. es gilt

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ermitteln Sie die Prämienhöhe π, welche der Versicherungsnehmer maximal für Versicherungsschutz zu bezahlen bereit ist.

Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.

7) Ein Versicherer mit dem Vermögen $v_0 = 100$ (in Mio. €) und der Nutzenfunktion

$$u(x) = \ln(x)$$

hat ein Risiko X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 51 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

versichert.

a) Welchen Betrag π_1 ist der Versicherer maximal bereit zu zahlen, damit ein Rückversicherer das Risiko zu 100% übernimmt?

b) Wie hoch muss die Prämie π_2 mindestens sein, damit ein Rückversicherer mit dem Vermögen $v_0 = 650$ (in Mio. €) und derselben Nutzenfunktion $u = \ln(x)$ das Risiko zu 100% übernimmt?

8) Betrachtet werden n Entscheidungsträger mit den Anfangsvermögen v_i, den Risiken X_i und den logarithmischen Nutzenfunktionen

$$u_i(x) = \ln(x + a_i) \qquad \text{mit } x > a_i$$

und $a_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Borch die Pareto-optimalen Risikoaustausche und interpretieren Sie das Ergebnis.

9) Betrachtet wird ein rationaler und risikoaverser Versicherungsnachfrager, der sich gegen ein Risiko versichern möchte, dessen Schadenhöhe L Exponential-verteilt ist mit Parameter $\lambda = 0{,}01$. D.h. es gilt

$$f_L(l) = 0{,}01 e^{-0{,}01 \cdot l}.$$

Der Versicherer berechnet seine Prämien gemäß dem proportionalen Prämienprinzip $P = (1+\beta)\mathbb{E}[I(L)]$ mit dem Gewinn- und Kostenzuschlag $\beta = 20\%$. Ermitteln Sie den für den Versicherungsnachfrager optimalen Versicherungsschutz, wenn die Prämie $P = 12$ € betragen soll.

10) Ermitteln Sie für das Risiko X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\mathbb{P}(X = c) = \begin{cases} 0{,}80 & \text{für } c = 0 \\ 0{,}12 & \text{für } c = 50 \\ 0{,}04 & \text{für } c = 80 \\ 0{,}02 & \text{für } c = 90 \\ 0{,}02 & \text{für } c = 100 \end{cases}$$

anhand einer Skizze für die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ den Value-at-Risk zu den Sicherheitsniveaus $q = 0{,}95; 0{,}96; 0{,}98$ und $0{,}99$.

11) Es sei $c \in (0,1)$ und X ein Risiko mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ cx & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie den Value-at-Risk $\mathrm{VaR}_q(X)$ zum Sicherheitsniveau $q \in (0,1)$.
b) Bestimmen Sie den Expected-Shortfall $\mathrm{ES}_q(X)$ zum Sicherheitsniveau $q \in (0,c)$.

12) Das Risiko X sein $\mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$-verteilt. D.h. X besitzt die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall von X zum Sicherheitsniveau $q \in (0,1)$.

13) Es sei X ein Exponential-verteiltes Risiko mit dem Parameter $\lambda > 0$. D.h. X besitzt die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie

a) analytisch den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall von X zum Sicherheitsniveau $q \in (0,1)$ sowie
b) mittels Excel die Werte des Value-at-Risks und des Expected-Shortfalls für die Parameterwerte $\lambda = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5$ und Sicherheitsniveaus $q = 0{,}95; 0{,}99; 0{,}995$. Was ist zu beobachten?

Hinweis: Es gilt

$$\int \ln(1-u)\, du = -(1-u)\ln(1-u) + (1-u) + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

14) Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastich unabhängig und Bernoulli-verteilt mit dem Parameter $p = 0{,}006$. D.h. es gilt

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(Y=0) = 0{,}994 \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(Y=1) = 0{,}006.$$

Weisen Sie damit nach, dass der Value-at-Risk i.A. kein subadditives Risikomaß ist. Verwenden Sie dabei das Sicherheitsniveau $q = 99\%$.

Übungsaufgaben

15) Gegeben sei der Zufallsvektor

$$(X_1, X_2)^T \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{E}),$$

die Zufallsvariable $Y_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$ und die Zufallsvariable $Y_2 = VY_1$ mit der von Y_1 stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen V mit

$$\mathbb{P}(V=-1) = \mathbb{P}(V=1) = \frac{1}{2}.$$

a) Zeigen Sie, dass $Y_2 \sim \mathrm{N}(0,1)$ gilt, und berechnen Sie $\rho(Y_1, Y_2)$.
b) Bestimmen Sie $\mathrm{VaR}_q(X_1 + X_2)$ für Sicherheitsniveaus $q \in (0,1)$ und stellen Sie $\mathrm{VaR}_q(Y_1 + Y_2)$ in Abhängigkeit von $\mathrm{VaR}_{2q-1}(X_1)$ dar.
c) Interpretieren Sie das Ergebnis kurz.

Universität Hamburg DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

16) Es sei S der Jahresschadenaufwand eines Versicherungsunternehmens und Y der Schadenaufwand eines von S stochastisch unabhängigen seltenen Extremszenarios. Es wird angenommen, dass S lognormal-verteilt ist mit

$$\mathbb{E}[S] = 2300 \text{ Mio. €} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Vko}(S) = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{\mathbb{E}[S]} = 5\%.$$

Für das seltene Extremszenario wird ferner unterstellt, dass es durchschnittlich nur alle 500 Jahre eintritt und dann einen Schaden von 400 Mio. € verursacht.

a) Ermitteln Sie das benötigte Risikokapital zum Sicherheitsniveau $q = 99\%$ für den Jahresschadenaufwand S für die beiden folgenden Fälle:

   i) $\mathrm{RK}(S) = \mathrm{VaR}_q(S - \mathbb{E}[S])$ (sog. mean Value-at-Risk)

   ii) $\mathrm{RK}(S) = \mathrm{ES}_q(S - \mathbb{E}[S])$ (sog. mean Expected-Shortfall)

b) Berechnen Sie nun für den Fall i) das benötigte Risikokapital für den aggregierten Schadenaufwand $S + Y$.

Hinweis: Für $S \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ gilt $\mathbb{E}[S] = e^{\mu + \sigma^2/2}$, $\mathrm{Var}(S) = (e^{\sigma^2} - 1)\mathbb{E}[S]^2$ $\mathrm{VaR}_q(S) = e^{\mu + \sigma\Phi^{-1}(q)}$ und $\mathrm{ES}_q(S) = \frac{1}{1-q} e^{\mu + \sigma^2/2} \Phi\big(\sigma - \Phi^{-1}(q)\big)$

Universität Hamburg DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

17) Betrachtet wird ein Gesamtunternehmen $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$, das aus den drei Geschäftsbereichen X_1, X_2, X_3 besteht. Für den Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ gelte

$$\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

wobei

$$\boldsymbol{\mu} = (10, 5, 5)^T, \ \mathrm{Var}(X_1) = 144, \ \mathrm{Var}(X_2) = 6{,}25, \ \mathrm{Var}(X_3) = 56{,}25$$

und die Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bekannt seien.

a) Bestimmen Sie die Varianz-Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ von $\mathbf{X}$.
b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.
c) Ermitteln Sie für die drei einzelnen Geschäftsbereiche X_1, X_2, X_3 und das Gesamtunternehmen X jeweils den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q = 99{,}5\%$.

18) Betrachtet wird die Stand-alone-proportionale Allokation in Verbindung mit dem Risikomaß $\rho(X) = \mathrm{Var}(X)$. D.h. die Risikokapitalien berechnen sich gemäß

$$\mathrm{RK}(X_i) = \frac{\mathrm{Var}(X_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}(X_j)} \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass es sich dabei im Falle von stochastisch unabhängigen Risiken um ein kohärentes Allokationsverfahren handelt.

19) Weisen Sie nach, dass das Kovarianzprinzip in Verbindung mit einem Risikomaß $\rho(X)$ mit der Eigenschaft

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{i \in M} X_i\right)}}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)}} \leq \frac{\rho\left(\sum_{i \in M} X_i\right)}{\rho\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)} \qquad \text{für alle } M \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

das Axiom „no undercut“ erfüllt.
Hinweis: Verwenden Sie dabei die Ungleichung

$$\mathrm{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}.$$

20) Bei den Marktrisiken einer Versicherungsgesellschaft wurden unter der Normalverteilungsannahme $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ für die einzelnen Risikokategorien X_i mittels

$$\mathrm{RK}(X_i) = \mathrm{ES}_q(X_i - \mathbb{E}[X_i])$$

(sog. mean Expected-Shortfall) für das Sicherheitsniveau $q = 99\%$ die folgenden Stand-alone-Risikokapitalien ermittelt:

	Zinsänderungsrisiko	Spreadrisiko	Aktienpreisrisiko	Währungsrisiko
$\mathrm{RK}(X_i)$	195 Mio. €	60 Mio. €	210 Mio. €	75 Mio. €

a) Bestimmen Sie das Risikokapital $\mathrm{RK}(X)$ für das aggregierte Marktrisiko $X = \sum_{i=1}^{4} X_i$ unter der vereinfachenden Annahme, dass die Risiken in den vier Kategorien X_i stochastisch unabhängig sind. Um wieviel Prozent ist dieses Risikokapital kleiner als die Summe der Stand-alone-Risikokapitalien $\mathrm{RK}(X_i)$ (Diversifikationseffekt)?

b) Führen Sie nun die gleiche Berechnung unter der realistischeren Annahme durch, dass zwischen den Risiken in den vier Kategorien die folgenden Korrelationen ρ_{ij} bestehen:

Korrelationsmatrix				
	Zinsänderungsrisiko	Spreadrisiko	Aktienpreisrisiko	Währungsrisiko
Zinsänderungsrisiko	1	−0,08	0,24	0,24
Spreadrisiko	−0,08	1	−0,37	−0,29
Aktienpreisrisiko	0,24	−0,37	1	0,37
Währungsrisiko	0,24	−0,29	0,37	1

21) Es sei wieder die Situation aus Aufgabe 1) gegeben. Berechnen Sie für die drei Geschäftsbereiche X_1, X_2, X_3 das jeweils resultierende Risikokapital

a) bei Verwendung der Stand-alone-proportionalen Allokation und des Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ als Risikomaß,

b) bei Verwendung der inkrementellen Allokation und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ als Risikomaß (zuerst für X_1, dann für X_2 und zum Schluss für X_3),

c) bei Verwendung des (modifizierten) Kovarianzprinzips und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ als Risikomaß,

d) bei Verwendung des Conditional-Tail-Expectation-Prinzips zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ und

e) bei Verwendung des Euler-Prinzips und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ als Risikomaß.

Übungsaufgaben

22) Es sei $X \sim \mathrm{U}[-1,1]$ und $Y := X^2$. D.h. X besitzt die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Weisen Sie nach, dass X und Y unkorreliert sind.

b) Zeigen Sie, dass X und Y nicht stochastisch unabhängig sind (Hinweis: Berechnen Sie hierzu die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq -1/4, Y \leq 1/4)$, $\mathbb{P}(X \leq -1/4)$ und $\mathbb{P}(Y \leq 1/4)$).

23) Es gelte $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und $Y := X^2$.

a) Bestimmen Sie den linearen Korrelationskoeffizienten von Pearson $\rho(X,Y)$.

b) Berechnen Sie den unteren und oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten $\lambda_l(X,Y)$ bzw. $\lambda_u(X,Y)$.

c) Interpretieren Sie kurz die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen a) und b).

Übungsaufgaben

24) Die folgende Tabelle enthält 10 Wertepaare mit Renditen der BMW- und Siemensaktie:

i	X_i (BMW-Aktie)	Y_i (Siemensaktie)
1	0,0030	-0,0051
2	0,0224	0,0072
3	-0,0059	-0,0055
4	0,0206	0,0017
5	-0,0058	0,0160
6	-0,0118	-0,0013
7	0,0064	0,0219
8	0,0039	0,0016
9	-0,0015	-0,0156
10	-0,0238	-0,0222

a) Berechnen Sie den empirischen linearen Korrelationskoeffizienten $r(X,Y)$.

b) Bestimmen Sie den Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall $r_\tau(X,Y)$.

c) Ermitteln Sie den Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman $r_S(X,Y)$.

25) Es sei $\widehat{X}_1$ ein Schätzer für den Parameter $\theta \in (a,b)$ mit Dichtefunktion $f_{\widehat{X}}$ und durch

$$\widehat{X}_2 = \begin{cases} a & \text{für } \widehat{X}_1 \leq a \\ \widehat{X}_1 & \text{für } \widehat{X}_1 \in (a,b) \\ b & \text{für } \widehat{X}_1 \geq b \end{cases}$$

sei ein weiterer Schätzer für θ definiert.

a) Weisen Sie nach, dass $\mathrm{MSE}_{\widehat{X}_1}(\theta) \geq \mathrm{MSE}_{\widehat{X}_2}(\theta)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass auch $\mathrm{Var}(\widehat{X}_1) \geq \mathrm{Var}(\widehat{X}_2)$ gilt, falls der Schätzer $\widehat{X}_1$ zusätzlich erwartungstreu ist.

26) Die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ seien stochastisch unabhängig und identisch-verteilt mit der Dichtefunktion

$$f_Y(y) = \begin{cases} \exp(-(y-\delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Übungsaufgaben

Untersuchen Sie, ob die folgenden Schätzer für δ erwartungstreu und/oder konsistent sind:

a) Das arithmetische Mittel $\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$

b) Der Schätzer $\widehat{Y}$ mit der Dichtefunktion

$$f_{\widehat{Y}}(y) = \begin{cases} n\exp(-n(y-\delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

27) Es gelte $N \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$.

a) Zeigen Sie, dass $\widehat{X} = \frac{N}{n}$ ein erwartungstreuer Schätzer für p ist.

b) Untersuchen Sie, ob $\widehat{Y} = n\widehat{X}(1-\widehat{X})$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\mathrm{Var}(N)$ ist.

28) Die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ seien stochastisch unabhängig und $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt.

a) Weisen Sie nach, dass $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \Gamma(n,\lambda)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\lambda Y \sim \Gamma(n,1)$ für $\lambda > 0$ gilt.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) und b) das $100(1-\alpha)\%$-Konfidenzintervall für λ.

Übungsaufgaben

29) Zeigen Sie, dass der ML- und der Momentenschätzer einer $\text{Exp}(\lambda)$-Verteilung mit $\lambda > 0$ durch $\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{Y}}$ mit $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ gegeben ist.

30) Zeigen Sie, dass der ML- und der Momentenschätzer einer $\Pi(\lambda)$-Verteilung mit $\lambda > 0$ durch $\widehat{\lambda} = \overline{N}$ mit $\overline{N} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i$ gegeben sind.

31) Eine inverse Gauss-Verteilung mit Mittelwert $\mu > 0$ und Shapeparameter $\lambda > 0$ (kurz: $Y \sim \text{IG}(\mu, \lambda)$) besitzt die Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y^3}}\, e^{-\frac{\lambda}{2\mu^2 y}(y-\mu)^2} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ermitteln Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer für die Parameter μ und λ.

32) Es sei X eine Zufallsvariable, deren Verteilung eine Mischung ist, die zu 40% aus einer $\text{Exp}(\lambda_1)$- und zu 60% aus einer $\text{Exp}(\lambda_2)$-Verteilung besteht. Es sei weiter bekannt, dass $\mathbb{E}[X] = 4$ und $\text{Var}(X) = 22$ gilt. Bestimmen Sie die Momentenschätzer für die Parameter λ_1 und λ_2.

33) Von einer $\text{Exp}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariable X liegen die Beobachtungen 0,47, 0,49, 0,91, 1,00, 2,47, 5,03 und 16,09 vor. Bestimmen Sie die ML-Schätzungen für das 25%-Quantil $x(0{,}25)$.

Übungsaufgaben

34) Gilt $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$, dann besitzt $X = Y^{-1}$ eine sogenannte Inverse-$\text{Exp}(\lambda)$-Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.
b) Ermitteln Sie den Median und den Modalwert von X.
c) Für X wurden die drei Schadenhöhen 186, 91 und 66 beobachtet und von sieben weiteren Schadenhöhen ist bekannt, dass sie gleich oder kleiner als 60 sind. Berechnen Sie die ML-Schätzung für den Modalwert.

35) Im ersten Schadenjahr gab es 100 Versicherungsschäden mit einer durchschnittlichen Schadenhöhe von 10.000 € und im zweiten Schadenjahr waren es 200 Versicherungsschäden mit einer durchschnittlichen Schadenhöhe von 12.500 €. Die jährliche Inflationsrate beträgt 10% und die Schadenhöhen folgen einer $\text{Par}(3, \lambda)$-Verteilung. Bestimmen Sie die Momentenschätzung für den Parameter λ für das dritte Schadenjahr.

36) Es seien $x'(p_1)$ und $x'(p_2)$ mit $0 < p_1, p_2 < 1$ die empirischen p_1- und p_2-Quantile einer $\text{Weibull}(a, b)$-Verteilung. Bestimmen Sie Schätzer für die beiden Parameter a und b so, dass die empirischen und theoretischen p_1- und p_2-Quantile übereinstimmmen (sog. Quantilmethode).

37) Die Analyse der Einzelschadenhöhen Y in einer bestimmten Branche ergab, dass die Daten durch eine Lognormalverteilung $\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ beschrieben werden können und für das arithmetische Mittel und die (unkorrigierte) Stichprobenvarianz

$$\overline{Y} = 3000 \qquad \text{bzw.} \qquad \widetilde{S}^2 = 144.000.000$$

gilt. Bisher war kein Selbstbehalt vorgesehen. Nun sollen jedoch zusätzlich die Selbstbehaltsvarianten $SB = 200$, $SB = 500$ und $SB = 1000$ angeboten werden. Um die Rabatte für diese Selbstbehalte berechnen zu können, sind die folgenden Fragen zu beantworten:

a) Wie verändert sich bei den drei Selbstbehaltvarianten die Schadenanzahl prozentual gegenüber dem Normalfall (d.h. kein Selbstbehalt)?
b) Berechnen Sie für die drei Selbstbehaltvarianten die jeweils erwartete Einzelschadenhöhe für den Versicherer.
c) Um wieviel Prozent reduziert sich bei den drei Selbstbehaltvarianten der erwartete Gesamtschadenaufwand für den Versicherer gegenüber dem Normalfall?

38) Bei der Tarifberechnung in der Elementarschadenversicherung (d.h. gegen Sturm, Hagel, Überschwemmung, Erdbeben, Lawinen Vulkanausbrüche) wird zwischen Normalschadenereignissen (Schadenhöhe < 50 Mio. €) und Großschadenereignissen (Schadenhöhe ≥ 50 Mio. €) unterschieden. In den Jahren 1986 bis 2005 wurden die folgenden 15 Großschadenereignisse beobachtet (Indexierung der Schadenhöhen auf 2005):

Datum	Schadenhöhe Y in Mio. €
20.06.1986	52,8
18.08.1986	135,2
18.07.1987	55,9
23.08.1987	138,6
26.02.1990	122,9
21.08.1992	55,8
24.09.1993	368,2
08.10.1993	83,8
18.05.1994	78,5
18.02.1999	75,3
12.05.1999	178,3
26.12.1999	182,8
04.07.2000	54,4
13.10.2000	365,3
20.08.2005	1051,1

a) Passen Sie an die Großschadendaten Y eine europäische Pareto-Verteilung $\mathrm{Par}^*(\alpha,u)$ mit Threshold $u = 50$ Mio. € an. Verwenden Sie zur Schätzung des Shapeparameters α den modifizierten (erwartungstreuen) ML-Schätzer $\widehat{\alpha}_*^{ML}$. Machen Sie hierbei auch eine Angabe über die Genauigkeit von $\widehat{\alpha}_*^{ML}$ mittels $\mathrm{Vko}(\widehat{\alpha}_*^{ML})$.

b) Überprüfen Sie die Anpassungsgüte mittels eines CDF-, log-log- und QQ-Plots.

c) Die Schadenhöhe Y eines einzelnen Schadenereignisses sei nun durch eine Limite $M = 2$ Mrd. € nach oben begrenzt. Berechnen Sie die erwartete Schadenhöhe bei einem einzelnen Großschadenereignis unter der Annahme, dass die Schadenhöhe Y die im Aufgabenteil a) angepasste europäische Pareto-Verteilung besitzt. Ermitteln Sie damit auch eine Schätzung für den erwarteten jährlichen Großschadenaufwand.

d) Zusätzlich zu den Annahmen im Aufgabenteil c) sei angenommen, dass N_M die Anzahl von Großschadenereignissen pro Jahr ist, welche die Limite $M = 2$ Mrd. € überschreiten, und $N_M \sim \Pi(\lambda_M)$ gilt. Ermitteln Sie eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr die Limite von $M = 2$ Mrd. € zur Anwendung kommt, sowie für die Wiederkehrperiode eines Großschadenereignisses, das die Limite überschreitet (d.h. die Länge des Zeitintervalls zwischen zwei Großschadenereignissen, welche die Limite übersteigen).

39) Über die letzten 20 Jahre wurden im Bereich der Naturgefahren folgende Anzahlen von Elementar-Großschadenereignissen (d.h. Schäden durch Sturm, Hagel, Überschwemmung, Erdbeben, Lawinen mit einer Höhe von mehr als 10 Mio. €) beobachtet:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl N_i	0	1	1	2	4	1	0	2	1	2	2	1	0	1	1	0	4	3	1	2

Testen Sie mittels eines χ^2-Anpassungstests die Nullhypothese

$$H_0 : N_i \sim \Pi(\lambda)$$

bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$.

40) In einem Hausratsversicherungsportfolio wurden die folgenden 40 (nach Größe geordneten) Schadenhöhen $y_1,\ldots,y_{40}$ beobachtet:

10	11	15	22	28	30	32	36	38	48
51	55	56	68	68	85	87	94	103	104
105	106	109	119	121	137	178	181	226	287
310	321	354	393	438	591	1045	1210	1212	2423

a) Bestimmen Sie den Mittelwert sowie die 25%-, 50%- und 75%-Quantile der empirischen Verteilung.

b) Stellen Sie die empirische Schadenhöhenverteilungsfunktion, das Histogramm, den Boxplot und den Cullen-Frey-Graph dar und interpretieren Sie diese Abbildungen.
c) Passen Sie an den Datensatz eine Gamma-, Lognormal-, Loggamma-, Weibull- und Pareto-Verteilung mittels Momenten- und ML-Methode an.
d) Beurteilen Sie die Anpassungsgüte der angepassten Verteilungen mit Hilfe von CDF-, QQ- und log-log-Plots.
e) Beurteilen Sie die Anpassungsgüte der angepassten Verteilungen mit Hilfe des Kolmogorov-Smirnov-Tests.
f) Beurteilen Sie die Anpassungsgüte der angepassten Verteilungen mit Hilfe des χ^2-Anpassungstests. Zerlegen Sie hierzu die Hausratsdaten anhand der angepassten Par$(\widehat{\alpha}^{ML}, \widehat{\lambda}^{ML})$-Verteilung in $r = 5$ gleichwahrscheinliche Intervalle $I_j = (c_{j-1}, c_j]$.
g) Beurteilen Sie anhand des Akaike- und des Bayesianisches-Informationskriteriums die Anpassungsgüte der mit Hilfe der ML-Methode angepassten fünf Verteilungen.

41) Der Gesamtschaden eines Versicherungsportfolios sei gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

wobei die Schadenanzahl N und die identisch-verteilten Einzelschadenhöhen $X_1, X_2, \ldots$ stochastisch unabhängig sind und

$$\mathbb{P}(N = n) = 0{,}9 \cdot 0{,}1^{n-1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$f_X(x) = 0{,}01 \cdot e^{-0{,}01} \qquad \text{für } x > 0$$

gilt. Die Simulation der Zufallsvariablen N und $X_1, X_2, \ldots$ erfolge mittels der Inversionsmethode und den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $U \sim \mathrm{U}[0,1]$ und $V_1, \ldots, V_n \sim \mathrm{U}[0,1]$. Ermitteln Sie den resultierenden Gesamtschaden S, wenn für die Zufallsvariablen $U, V_1, V_2, \ldots$ die folgenden Pseudozufallszahlen generiert wurden:

$$u = 0{,}05,\ v_1 = 0{,}3,\ v_2 = 0{,}22,\ v_3 = 0{,}52,\ v_4 = 0{,}46$$

42) Der Gesamtschaden eines Versicherungsportfolios sei gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

wobei die Schadenanzahl N und die identisch-verteilten Einzelschadenhöhen $X_1, X_2, \ldots$ stochastisch unabhängig sind und

n	$F_N(n)$
0	0,125
1	0,312
2	0,500
3	0,656
4	0,773
5	0,855
$\vdots$	$\vdots$

bzw.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/200)^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Übungsaufgaben

Zusätzlich wird angenommen, dass pro Schaden der gedeckte Höchstschaden $l = 650$ beträgt und ein Selbstbehalt von $d = 150$ existiert. Der nun resultierende Gesamtschaden wird mit $\widetilde{S}$ bezeichnet.

Die Simulation der Zufallsvariablen N und $X_1, X_2, \ldots$ erfolge mittels der Inversionsmethode und den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $U \sim \mathrm{U}[0,1]$ und $V_1, \ldots, V_n \sim \mathrm{U}[0,1]$. Ermitteln Sie unter Berücksichtigung des gedeckten Höchstschadens $l = 650$ und Selbstbehalts $d = 150$ pro Schaden den resultierenden Gesamtschaden $\widetilde{S}$, wenn für die Zufallsvariablen $U, V_1, V_2, \ldots$ die folgenden Pseudozufallszahlen generiert wurden:

$$u = 0{,}7654,\ v_1 = 0{,}2738,\ v_2 = 0{,}5152,\ v_3 = 0{,}7537,\ v_4 = 0{,}6481,\ v_5 = 0{,}3153$$

43) Die Zufallsvariable X sei invers Pareto-verteilt mit den Parametern $\alpha, \lambda > 0$. D.h. sie besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{x+\lambda}\right)^{\alpha} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und es gilt

$$\mathbb{E}[X^{-1}] = \frac{1}{\lambda(\alpha-1)} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{E}[X^{-2}] = \frac{1}{\lambda^2(\alpha-1)(\alpha-2)}.$$

Im Folgenden sei $\alpha = \lambda = 4$.

a) Erzeugen Sie aus einer $\mathrm{U}[0,1]$-verteilten Zufallsvariablen U mit Hilfe der Inversionsmethode eine Zufallsvariable, die invers Pareto-verteilt ist.
b) Ermitteln Sie für die beiden Momente $\mathbb{E}[X^{-1}]$ und $\mathbb{E}[X^{-2}]$ eine (naive) Monte-Carlo-Schätzung vom Simulationsumfang $n = 50$.
c) Bestimmen Sie eine Monte-Carlo-Schätzung für das 95%-Konfidenzintervall von $\mathbb{E}[X^{-1}]$ und geben Sie an, ob dieses Intervall den wahren Wert von $\mathbb{E}[X^{-1}]$ enthält.

44) Betrachtet wird eine Verteilungsfunktion $F(x)$ mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{für } \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Verwerfungsmethode und der Hilfsdichte

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

einen Algorithmus zur Erzeugung von F-verteilten Pseudozufallszahlen.
b) Bestimmen Sie die Effizienz dieses Algorithmus.

45) Es gelte $X := U^2$ und $Y := (1-U)^2$ mit $U \sim \mathrm{U}[0,1]$.

a) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ und $\mathrm{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right)$.
b) Bestimmen Sie eine (naive) Monte-Carlo-Schätzung für das Integral

$$\int_0^1 u^2\, du \tag{1}$$

unter Verwendung von 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $U_1, \ldots, U_{100} \sim \mathrm{U}[0,1]$. Ermitteln Sie ferner eine Schätzung für die Varianz dieser Monte-Carlo-Schätzung.

c) Zeigen Sie, wie die Monte-Carlo-Schätzung aus Aufgabenteil b) verbessert werden kann, wenn weiterhin nur die 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $U_1, \ldots, U_{100} \sim \mathrm{U}[0,1]$ aus Aufgabenteil b) zur Verfügung stehen.

46) Betrachtet wird das Integral

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e - 1}\, dx. \tag{2}$$

a) Ermitteln Sie für das Integral (2) eine (naive) Monte-Carlo-Schätzung unter Verwendung von 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $X_1, \ldots, X_{100} \sim \mathrm{U}[0,1]$.

b) Bestimmen Sie eine Monte-Carlo-Schätzung für (2) unter Verwendung von 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $X_1, \ldots, X_{100} \sim \mathrm{U}[0,1]$ und 100 zusätzlichen antithetischen Pseudozufallszahlen $X_{101}, \ldots, X_{200} \sim \mathrm{U}[0,1]$.

c) Bestimmen Sie nun eine Monte-Carlo-Schätzung für (2) unter Verwendung von $X_1, \ldots, X_{100} \sim \mathrm{U}[0,1]$ und der Hilfsfunktion $h(x) := \frac{x}{e-1}$ für $x \in [0,1]$.

d) Vergleichen Sie die drei Monte-Carlo-Schätzungen aus den Aufgabenteilen a) bis c).

47) Es sei $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $0 \leq g(x) \leq c$ für $x \in [a,b]$ und

$$\theta := \int_a^b g(x)\, dx.$$

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\theta = (b-a)\mathbb{E}[g(X)] \qquad \text{für } X \sim \mathrm{U}[a,b]$$

b) Es sei $Y \sim \mathrm{U}[0,c]$ eine von $X \sim \mathrm{U}[a,b]$ stochastisch unabhängige Zufallsvariable. Weisen Sie nach, dass dann gilt

$$\mathbb{E}[g(X)] = c\mathbb{P}\big(Y \leq g(X)\big).$$

c) Die zweidimensionalen Zufallsvariablen $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n) \sim F_{(X,Y)}$ seien stochastisch unabhängig, wobei X und Y die Zufallsvariablen aus Aufgabenteil b) sind und

$$W := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{Y \leq g(X)\}}(X_i, Y_i).$$

Weisen Sie für den sog. hit-or-miss-Schätzer

$$\widetilde{\theta} := c(b-a)\frac{W}{n}$$

die beiden folgenden Eigenschaften nach:

$$\mathbb{E}[\widetilde{\theta}] = \theta \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}(\widetilde{\theta}) = \frac{\theta(c(b-a)-\theta)}{n}$$