

Übung 1: Grundlagen der Zeitreihenanalyse

Aufgabe 1

Betrachtet wird der stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = U_1 \sin(2\pi\delta t) + U_2 \cos(2\pi\delta t),$$

wobei U_1 und U_2 stochastisch unabhängig sind mit

$$\mathbb{E}[U_1] = \mathbb{E}[U_2] = 0 \quad \text{und} \quad \text{Var}(U_1) = \text{Var}(U_2) = \sigma^2.$$

Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ schwach stationär ist.

Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem $\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta)$.

Aufgabe 2

Weisen Sie nach, dass der stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sin(2\pi Ut)$$

und einer auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen U schwach stationär ist.

Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$.

Aufgabe 3

Betrachtet wird der stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$$

und $\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$. Bestimmen Sie die Mittelwert- und Autokovarianzfunktion von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ und geben Sie an, ob $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ schwach stationär ist.

Aufgabe 4

Gegeben sei der stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = (-1)^t Y,$$

wobei Y eine Zufallsvariable ist. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für Y an, so dass der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ schwach stationär ist.

Aufgabe 5

Es seien $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ und $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ zwei schwach stationäre und unkorrelierte Prozesse. Zeigen Sie, dass dann auch der stochastische Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit $Z_t := X_t + Y_t$ schwach stationär ist.

Aufgabe 6

Gegeben sei der stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$$

sowie $\theta \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$. Durch $M_{\varepsilon_t}(s) := \mathbb{E}[e^{s\varepsilon_t}]$ sei die momenterzeugende Funktion der Zufallsvariablen ε_t für $t \in \mathbb{Z}$ gegeben.

a) Drücken Sie die momenterzeugende Funktion

$$M_{(X_1, \dots, X_n)}(s_1, \dots, s_n) = \mathbb{E} \left[\exp \left(\sum_{t=1}^n s_t X_t \right) \right]$$

des Zufallsvektors $(X_1, \dots, X_n)^T$ mit Hilfe von $M_\varepsilon(s)$ aus.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses des Aufgabenteils a), dass $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein stark stationärer stochastischer Prozess ist.

Übung 2: Klassische Komponentenmodelle

Aufgabe 1

Die Zeitreihe $(x_t)_{t \in \mathbb{T}}$ sei gegeben durch

$$300, 370, 390, 400, 420, 450, 470.$$

Es wird das additive Komponentenmodell ohne Saison zugrunde gelegt.

- Berechnen Sie eine Regressionsgerade als Schätzung für die glatte Komponente $(g_t)_{t \in \mathbb{T}}$ der Zeitreihe und stellen Sie diese zusammen mit der Zeitreihe $(x_t)_{t \in \mathbb{T}}$ graphisch dar.
- Geben Sie die trendbereinigte Zeitreihe an.
- Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil a) eine Prognose für den Zeitreihenwert zum Zeitpunkt $t = 10$.
- Berechnen Sie mit Hilfe des einfachen gleitenden 3er-Durchschnitts eine Schätzung für die glatte Komponente $(g_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

Aufgabe 2

Die folgende Tabelle enthält die vierteljährlichen Bauinvestitionen in Ostdeutschland $(x_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ in Mrd. Euro für die Jahre 1991 bis 2002 zu Preisen von 1995:

Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$
1991/1	1	7,44	1992/1	5	11,05	1993/1	9	12,73	1994/1	13	16,25
1991/2	2	8,92	1992/2	6	12,99	1993/2	10	15,67	1994/2	14	19,55
1991/3	3	9,40	1992/3	7	13,29	1993/3	11	16,30	1994/3	15	19,93
1991/4	4	8,87	1992/4	8	12,22	1993/4	12	14,61	1994/4	16	18,00
Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$
1995/1	17	17,53	1996/1	21	14,86	1997/1	25	15,14	1998/1	29	15,05
1995/2	18	20,14	1996/2	22	20,34	1997/2	26	19,51	1998/2	30	17,01
1995/3	19	20,29	1996/3	23	21,18	1997/3	27	19,73	1998/3	31	18,01
1995/4	20	17,54	1996/4	24	18,21	1997/4	28	16,91	1998/4	32	15,61
Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$
1999/1	33	13,64	2000/1	37	13,23	2001/1	41	11,29	2002/1	45	10,11
1999/2	34	16,16	2000/2	38	14,57	2001/2	42	12,74	2002/2	46	
1999/3	35	17,10	2000/3	39	14,99	2001/3	43	13,29	2002/3	47	
1999/4	36	15,05	2000/4	40	12,89	2001/4	44	11,53	2002/4	48	

Im Folgenden wird das additive Komponentenmodell ohne Saison zugrunde gelegt.

- Berechnen Sie mittels Regressionsanalyse eine Schätzung für die glatte Komponente $(g_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ der Zeitreihe $(x_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$. Verwenden Sie hierbei als Regressionsfunktion eine quadratische Funktion

$$f(t; \beta) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2.$$

Stellen Sie ferner die Zeitreihe $(x_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ und die Schätzung für die glatte Komponente $(\hat{g}_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ gemeinsam in einer Abbildung dar.

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden Summenformeln:

$$\begin{aligned}
 \sum_{t=1}^T t &= \frac{T(T+1)}{2} \\
 \sum_{t=1}^T t^2 &= \frac{T(T+1)(2T+1)}{6} \\
 \sum_{t=1}^T t^3 &= \frac{T^2(T+1)^2}{4} \\
 \sum_{t=1}^T t^4 &= \frac{T(T+1)(2T+1)(3T^2+3T-1)}{30}
 \end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil a) Prognosen für die vierteljährlichen Bauinvestitionen in den nächsten 3 Quartalen.

Aufgabe 3

Für den stochastischen Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gelte

$$X_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t \quad \text{für } t \in \mathbb{Z}$$

mit $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

- a) Untersuchen Sie, ob $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mittelwert-, varianz- und kovarianzstationär sowie schwach stationär ist.
b) Zeigen Sie, dass $(\Delta X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ schwach stationär ist.
c) Ermitteln Sie für den einfachen gleitenden $(2r+1)$ -Durchschnitt $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$Y_t = \frac{1}{2r+1} \sum_{u=-r}^r X_{t-u}$$

den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y_t]$.

- d) Bestimmen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(h)$ von $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Aufgabe 4

In der folgenden Tabelle sind die Vierteljahresumsätze $(x_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ eines Spirituosenherstellers für die Jahre 2011 bis 2018 zusammengefasst.

Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$
2011/1	1	54,8	2012/1	5	53,6	2013/1	9	56,8	2014/1	13	58,2
2011/2	2	42,6	2012/2	6	44,4	2013/2	10	48,6	2014/2	14	52,6
2011/3	3	57,4	2012/3	7	59,6	2013/3	11	60,2	2014/3	15	61,0
2011/4	4	60,0	2012/4	8	64,8	2013/4	12	68,4	2014/4	16	69,2
Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$
2015/1	17	60,4	2016/1	21	64,2	2017/1	25	63,8	2018/1	29	66,0
2015/2	18	52,8	2016/2	22	54,6	2017/2	26	54,0	2018/2	30	56,0
2015/3	19	64,0	2016/3	23	62,2	2017/3	27	66,4	2018/3	31	64,8
2015/4	20	68,2	2016/4	24	71,0	2017/4	28	72,8	2018/4	32	74,0

Im Folgenden wird das additive Komponentenmodell mit konstanter Saisonfigur unterstellt.

- a) Stellen Sie die Zeitreihe $(x_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ graphisch dar.
b) Ermitteln Sie mittels des einfachen gleitenden 5-er Durchschnitts

$$\text{Smooth}(x_t) = \frac{1}{8}x_{t-2} + \frac{1}{4}x_{t-1} + \frac{1}{4}x_t + \frac{1}{4}x_{t+1} + \frac{1}{8}x_{t+2}$$

eine Schätzung $(\hat{g}_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ für die glatte Komponente $(g_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ der Zeitreihe $(x_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ und stellen Sie diese Schätzung zusammen mit der Zeitreihe graphisch dar.

- c) Zeichnen Sie die trendbereinigte Zeitreihe $(x_{t,l} - \hat{g}_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ und bestimmen Sie mit Hilfe des Phasendurchschnittsverfahrens eine Schätzung $(\hat{s}_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ für die Saisonkomponente $(s_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$. Stellen Sie die geschätzte Saisonkomponente und die saisonbereinigte Zeitreihe $(x_{t,l} - \hat{s}_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ graphisch dar und interpretieren Sie das Ergebnis kurz.
d) Untersuchen Sie mit Hilfe von R die Güte des angepassten additiven Komponentenmodells mit Saison anhand der Residuen $(\hat{\varepsilon}_t)_{t \in \mathbb{T}}$. Verwenden Sie hierzu einen Plot der Residuen $(\hat{\varepsilon}_t)_{t \in \mathbb{T}}$, die empirische Autokorrelationsfunktion $\hat{\rho}(h)$, einen QQ-Plot, einen Shapiro-Wilk-Test und einen Jarque-Bera-Test. Kommentieren Sie ferner Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 5

Es werden wieder die Vierteljahresumsätze $(x_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ eines Spirituosenherstellers für die Jahre 2011 bis 2018 aus Aufgabe 4 betrachtet und das additive Komponentenmodell mit konstanter Saisonfigur unterstellt.

- a) Passen Sie an die Zeitreihenwerte $(x_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ eine geeignete Regressionsfunktion mit Saisondummies an. Stellen Sie ferner die Zeitreihe $(x_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ zusammen mit der angepassten Regressionsfunktion graphisch dar.
b) Ermitteln Sie Schätzungen für die normierten Saisonkoeffizienten (normierte Phasendurchschnitte).
c) Berechnen Sie Prognosen für die nächsten vier Quartale.

Aufgabe 6

In der folgenden Tabelle sind die Tagespreise $(x_t)_{t \in \mathbb{T}}$ für eine Feinunze Gold in US\$ vom 28.07.2011 bis 24.08.2011 zusammengefasst.

Tag	t	\$	Tag	t	\$
28.07.2011	1	1588,00	11.08.2011	11	1754,00
29.07.2011	2	1626,10	12.08.2011	12	1745,40
01.08.2011	3	1619,05	15.08.2011	13	1764,60
02.08.2011	4	1658,40	16.08.2011	14	1786,00
03.08.2011	5	1658,00	17.08.2011	15	1791,30
04.08.2011	6	1650,10	18.08.2011	16	1825,10
05.08.2011	7	1661,00	19.08.2011	17	1848,60
08.08.2011	8	1720,10	20.08.2011	18	1895,60
09.08.2011	9	1732,60	23.08.2011	19	1824,40
10.08.2011	10	1792,80	24.08.2011	20	1806,50

- Bestimmen Sie mittels exponentieller Glättung eine Schätzung für die glatte Komponente $(g_t)_{t \in \mathbb{T}}$ der Zeitreihe $(x_t)_{t \in \mathbb{T}}$. Verwenden Sie hierzu den Startwert $\hat{g}_1 = x_1$ und die Glättungsparameter $\alpha = 0,15$ bzw. $\alpha = 0,4$. Stellen Sie die beiden Schätzungen für die glatte Komponente $(\hat{g}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ zusammen mit der Zeitreihe $(x_t)_{t \in \mathbb{T}}$ graphisch dar und kommentieren Sie das Ergebnis.
- Bestimmen Sie mittels Verfahren von Holt eine Schätzung für die glatte Komponente $(g_t)_{t \in \mathbb{T}}$ der Zeitreihe $(x_t)_{t \in \mathbb{T}}$. Verwenden Sie hierzu die Startwerte $\hat{m}_1 = x_1$ und $\hat{b}_1 = 0$ sowie die Glättungsparameter $\alpha = 0,3$ und $\beta = 0,5$. Stellen Sie die Schätzung für die glatte Komponente $(\hat{g}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ zusammen mit der Zeitreihe $(x_t)_{t \in \mathbb{T}}$ graphisch dar.
- Berechnen Sie eine Prognose für die Zeitpunkte $t = 25$ und $t = 30$.

Aufgabe 7

Es wird eine Zeitreihe $(x_{t,l})_{t \in \mathbb{T}}$ bestehend aus Monatswerten betrachtet. Zum Zeitpunkt $T = 49$ seien der Zeitreihenwert $x_{49,1} = 40,0$, die Schätzungen

$$\hat{m}_{48} = 67,4 \quad \text{bzw.} \quad \hat{b}_{48} = 0,779$$

für das Niveau und die Niveauveränderung sowie die Schätzungen

$$\begin{aligned} \hat{s}_{37,1} &= 0,756, & \hat{s}_{38,2} &= 0,458, & \hat{s}_{39,3} &= 0,855, & \hat{s}_{40,4} &= 1,157 \\ \hat{s}_{41,5} &= 1,539, & \hat{s}_{42,6} &= 1,556, & \hat{s}_{43,7} &= 1,561, & \hat{s}_{44,8} &= 1,525 \\ \hat{s}_{45,9} &= 1,293, & \hat{s}_{46,10} &= 0,882, & \hat{s}_{47,11} &= 0,795, & \hat{s}_{48,12} &= 0,672 \end{aligned}$$

für die Saisonkomponenten bekannt. Die Glättungsparameter seien gegeben durch $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,05$ und $\gamma = 0,35$. Berechnen Sie aus diesen Angaben Prognosen für die Zeitpunkte $t = 50$ und $t = 54$. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Saisonkomponente multiplikativ mit der glatten Komponente verknüpft ist.

Übung 3: MA-Prozesse

Aufgabe 1

Weisen Sie nach, dass die absolute Summierbarkeit einer unendlichen Reihe stets die quadratische Summierbarkeit der unendlichen Reihe impliziert. D.h. es gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\eta_j| < \infty \implies \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^2 < \infty.$$

Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Umkehrung der obigen Aussage nicht gilt.

Aufgabe 2

Geben Sie an, um was für einen stochastischen Prozess es sich bei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t + 0,7\varepsilon_{t-1} - 0,3\varepsilon_{t-2} + 0,2\varepsilon_{t-3}$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, 50)$ handelt. Bestimmen Sie ferner die Autokovarianzfunktion $\gamma(h)$ von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Aufgabe 3

Ermitteln Sie für welche Werte $\theta \in \mathbb{R}$ die Autokorrelation $\rho(\pm 1)$ des MA(1)-Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

sein Maximum bzw. Minimum annimmt. Zeigen Sie ferner, dass

$$|\rho(\pm 1)| \leq \frac{1}{2}$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für welche Wertepaare $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ ein MA(2)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 5

Betrachtet wird der MA(1)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

- Geben Sie die Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion $\gamma(h)$ bzw. $\rho(h)$ von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ an.
- Für welche Werte von θ gilt $\rho(1) = 0,4$ und welcher dieser Werte ist zu bevorzugen?
- Anstelle eines MA(1)-Modells genüge der stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ nun dem MA(∞)-Modell

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} c\varepsilon_{t-j},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Weisen Sie nach, dass der stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ nicht schwach stationär ist.

- Betrachtet wird wieder der stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ aus Aufgabenteil c). Zeigen Sie, dass der aus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ durch Differenzenbildung resultierende stochastische Prozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit $Y_t = \Delta X_t$ ein schwach stationärer MA(1)-Prozess ist.
- Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion des stochastischen Prozesses $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ aus Aufgabenteil d).

Übung 4: AR-Prozesse

Aufgabe 1

Ermitteln Sie für den schwach stationären AR(1)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = 0,8X_{t-1} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ die Varianz des nicht zentrierten 4-er Durchschnitts $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$Y_t = \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{1}{4}X_t + \frac{1}{4}X_{t+1}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für den AR(2)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = -0,9X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ das zugehörige Autoregressive Polynom $\Phi_2(z)$ sowie dessen Nullstellen in Polardarstellung. Stellen Sie die Autokorrelationsfunktion $\rho(h)$ als Funktion dieser Nullstellen dar und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3

Betrachtet wird der stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = -2X_{t-1} - \frac{5}{4}X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

- Geben Sie an, um was für einen Prozess es sich bei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ handelt. Geben Sie ferner den zugehörigen Autoregressiven-Operator sowie Moving-Average-Operator an. Stellen Sie $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit Hilfe dieser beiden Operatoren dar.
- Untersuchen Sie den Prozess auf Parameterredundanz, schwache Stationarität, Kausalität und Invertierbarkeit.

Aufgabe 4

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten die MA(∞)-Darstellung des kausalen AR(2)-Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = 1,3X_{t-1} - 0,4X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Differenzengleichung 2. Ordnung

$$a\psi_{j-1} - b\psi_j + \psi_{j+1} = 0 \quad \text{für } j \in \mathbb{N}$$

die Lösung

$$\psi_j = c_1 \left(\frac{1}{z_1} \right)^j + c_2 \left(\frac{1}{z_2} \right)^j \quad \text{für } j \in \mathbb{N}$$

besitzt, wobei z_1 und z_2 die Nullstellen des Polynoms $\Phi_2(z) = 1 - bz + az^2$ sind und $c_1 + c_2 = 1$ gilt.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die partielle Autokorrelationsfunktion $\alpha(h)$ eines kausalen AR(2)-Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ in Abhängigkeit von den Koeffizienten ϕ_1 und ϕ_2 .

Übung 5: ARMA-, ARIMA- und SARIMA-Prozesse

Aufgabe 1

Multiplizieren Sie die beiden folgenden Lag-Polynome aus und benennen Sie die zugehörigen Prozesse minimaler Ordnung:

- $(1 - 0,2L)(1 - 0,6L)X_t = (1 + 0,5L)\varepsilon_t$
- $(1 - 0,7L)(1 - 0,4L^{12})(1 - L)X_t = (1 + 0,5L)(1 - 0,4L^{12})\varepsilon_t$

Aufgabe 2

Im Folgenden gelte $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$. Benennen Sie die untenstehenden stochastischen Prozesse:

- $X_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$
- $X_t = \frac{13}{10}X_{t-1} + \varepsilon_t$
- $X_t = \frac{13}{10}X_{t-1} - \frac{2}{5}X_{t-2} + \varepsilon_t$
- $X_t = \frac{13}{10}X_{t-1} - \frac{2}{5}X_{t-2} + \varepsilon_t - \frac{3}{10}\varepsilon_{t-1}$
- $X_t = \frac{1}{5}X_{t-1} + \frac{4}{5}X_{t-2} + \varepsilon_t$
- $X_t = \frac{1}{5}X_{t-1} + \frac{4}{5}X_{t-2} + \varepsilon_t - \frac{3}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}$

Untersuchen Sie die Prozesse jeweils auf Parameterredundanz, schwache Stationarität, Kausalität und Invertierbarkeit.

Aufgabe 3

Betrachtet wird ein kausaler ARMA(2, 1)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = 1,3X_{t-1} - 0,4X_{t-2} + \varepsilon_t - 0,2\varepsilon_{t-1}$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

- Berechnen Sie mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten die MA(∞)-Darstellung von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Differenzengleichung 2. Ordnung

$$a\psi_{j-1} - b\psi_j + \psi_{j+1} = 0 \quad \text{für } j \in \mathbb{N}$$

die Lösung

$$\psi_j = c_1 \left(\frac{1}{z_1} \right)^j + c_2 \left(\frac{1}{z_2} \right)^j \quad \text{für } j \in \mathbb{N}$$

besitzt, wobei z_1 und z_2 die Nullstellen des Polynoms $\Phi_2(z) = 1 - bz + az^2$ sind und $c_1 + c_2 = 1$ gilt.

- Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil a) die Autokovarianzfunktion von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Aufgabe 4

Betrachtet wird der stochastische Prozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$Y_t = X_t + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ sowie dem schwach stationären ARMA(p, q)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\Phi_p(L)X_t = \Theta_q(L)\tilde{\varepsilon}_t$$

und $\tilde{\varepsilon}_t \sim \text{WN}(0, \sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2)$. Ferner gelte $\text{Cov}(\varepsilon_s, \tilde{\varepsilon}_t) = 0$ für alle $s, t \in \mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie, dass $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess ist und bestimmen Sie seine Autokovarianzfunktion $\gamma_Y(h)$ in Abhängigkeit von σ_ε^2 und der Autokovarianzfunktion $\gamma_X(h)$ von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

b) Weisen Sie nach, dass der stochastische Prozess $(U_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$U_t = \Phi_p(L)Y_t$$

ein r -korrelierter Prozess mit $r := \max\{p, q\}$ und damit ein $\text{MA}(r)$ -Prozess ist. Was lässt sich daraus für den Prozess $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ folgern?

Aufgabe 5

Es sei der stochastische Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = 0,4X_{t-1} + 0,45X_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + 0,25\varepsilon_{t-2} \quad (1)$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ gegeben.

- Drücken Sie die Gleichung (1) mit Hilfe des Lag-Operators L aus und geben Sie an, um was für einen Prozess es sich bei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ handelt.
- Untersuchen Sie $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ auf Parameterredundanz und geben Sie gegebenenfalls an, um was für einen Prozess es sich nach Beseitigung der Parameterredundanz handelt.
- Untersuchen Sie den Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ auf schwache Stationarität, Kausalität und Invertierbarkeit.
- Geben Sie die $\text{MA}(\infty)$ -Darstellung des Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ an, falls er kausal ist.
- Geben Sie die $\text{AR}(\infty)$ -Darstellung des Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ an, falls er invertierbar ist.

Aufgabe 6

Betrachtet wird der $\text{IMA}(1, 1)$ -Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

sowie $|\theta| < 1$ und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass dieser Prozess die Darstellung

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \theta)\theta^{j-1} X_{t-j} + \varepsilon_t$$

besitzt.

Aufgabe 7

Im Folgenden gelte $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$. Benennen Sie die drei untenstehenden stochastischen Prozesse und geben Sie jeweils an, ob der Prozess schwach stationär ist:

- $(1 - L)^2(1 - L^{12})X_t = (1 - 0,34L + 0,486L^2)(1 - 0,485L^{12} + 0,042L^{24})\varepsilon_t$
- $(1 - 0,2L)(1 - 0,32L^4 - 0,20L^8)(1 - L^4)X_t = \varepsilon_t$
- $(1 - L^{12})(1 - L)X_t = (1 + \tilde{\theta}L^{12})(1 + \theta L)\varepsilon_t$

Aufgabe 8

Betrachtet wird der $\text{SARIMA}(0, 0, 1) \times (1, 0, 0)_{12}$ -Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$(1 - \tilde{\phi}L^{12})X_t = (1 + \theta L)\varepsilon_t$$

sowie $|\tilde{\phi}| < 1$, $|\theta| < 1$ und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

- Erläutern Sie, ob der SARIMA -Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ kausal, invertierbar und/oder schwach stationär ist.
- Geben Sie den Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ in der ARMA -Parameterisierung an.
- Bestimmen Sie die Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Übung 6: Schätzung von ARMA-Prozessen

Aufgabe 1

Für einen schwach stationären stochastischen Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ wurde der Pfad (die Zeitreihe)

t	X_t
1	4
2	14
3	10
4	16
5	6
6	14
7	10
8	14

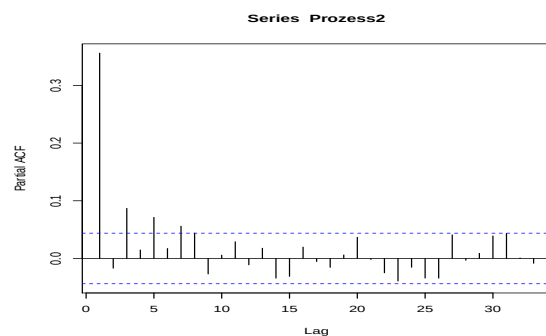
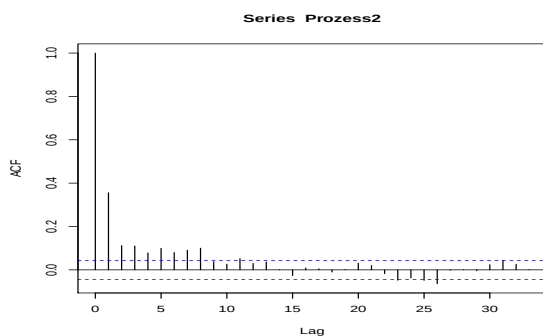
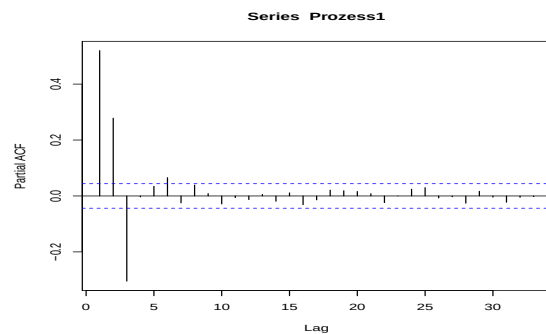
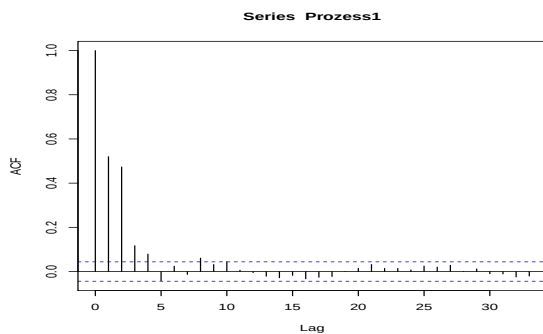
beobachtet.

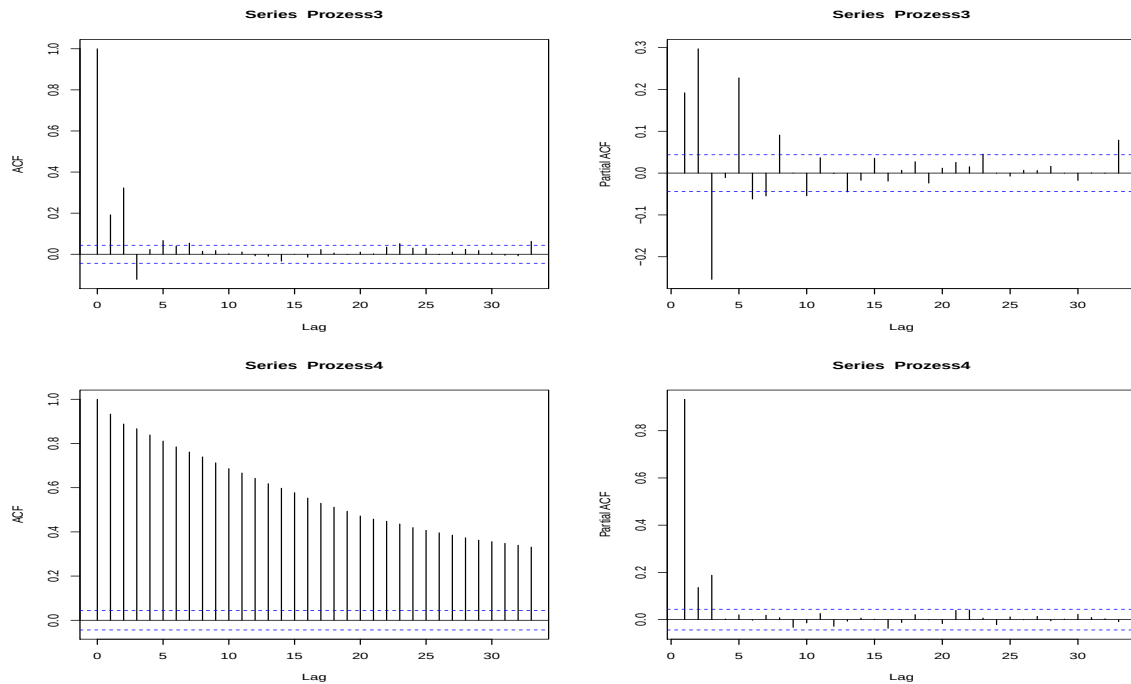
- Bestimmen Sie die empirische Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion $\hat{\gamma}(h)$ bzw. $\hat{\rho}(h)$ für die Lags $h = 0, \dots, 7$.
- Bestimmen Sie die empirische partielle Autokorrelationsfunktion $\hat{\alpha}(h)$ für die Lags $h = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe 2

Benennen Sie die folgenden vier stochastischen Prozesse. Ordnen Sie ferner die stochastischen Prozesse den empirischen Autokorrelationsfunktionen und empirischen partiellen Autokorrelationsfunktionen zu und begründen Sie ihre Zuordnung kurz.

- $X_t = \frac{3}{4}X_{t-1} + \frac{1}{5}X_{t-3} + \varepsilon_t$
- $X_t = \varepsilon_t + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2} - \frac{1}{5}\varepsilon_{t-3}$
- $X_t = \frac{9}{20}X_{t-1} + \frac{2}{5}X_{t-2} - \frac{3}{10}X_{t-3} + \varepsilon_t$
- $X_t = \frac{4}{5}X_{t-1} + \frac{1}{20}X_{t-2} + \varepsilon_t - \frac{9}{20}\varepsilon_{t-1} - \frac{1}{4}\varepsilon_{t-2}$





Aufgabe 3

- a) Für den kausalen AR(2)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ wurden anhand von $T = 100$ Beobachtungen die Schätzungen $\hat{\rho}(1) = 0,8$ und $\hat{\rho}(2) = 0,5$ sowie

$$\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{100} X_t = 2$$

ermittelt. Bestimmen Sie hiermit die Momentenschätzungen für die Parameter ϕ_1, ϕ_2 und μ .

- b) Es wird nun der AR(1)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ betrachtet. Mittels der Momentenmethode wurde für ϕ die Schätzung $\hat{\phi} = 0,7$ ermittelt. Berechnen Sie die benötigte Anzahl T an Beobachtungen, für welche das 95%-Konfidenzintervall von $\hat{\phi}$ nicht größer als $\hat{\phi} \pm 0,1$ ist.

Aufgabe 4

Es wird der AR(2)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \phi X_{t-1} + \phi^2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ betrachtet.

- Ermitteln Sie für welche Werte von ϕ der Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ kausal ist.
- Anhand von $T = 200$ Beobachtungen wurden die Schätzungen

$$\hat{\gamma}(0) = 6,06, \quad \hat{\rho}(1) = 0,687, \quad \hat{\rho}(2) = 0,610$$

berechnet. Berechnen Sie damit die Yule-Walker-Schätzer für ϕ und σ^2 .

Aufgabe 5

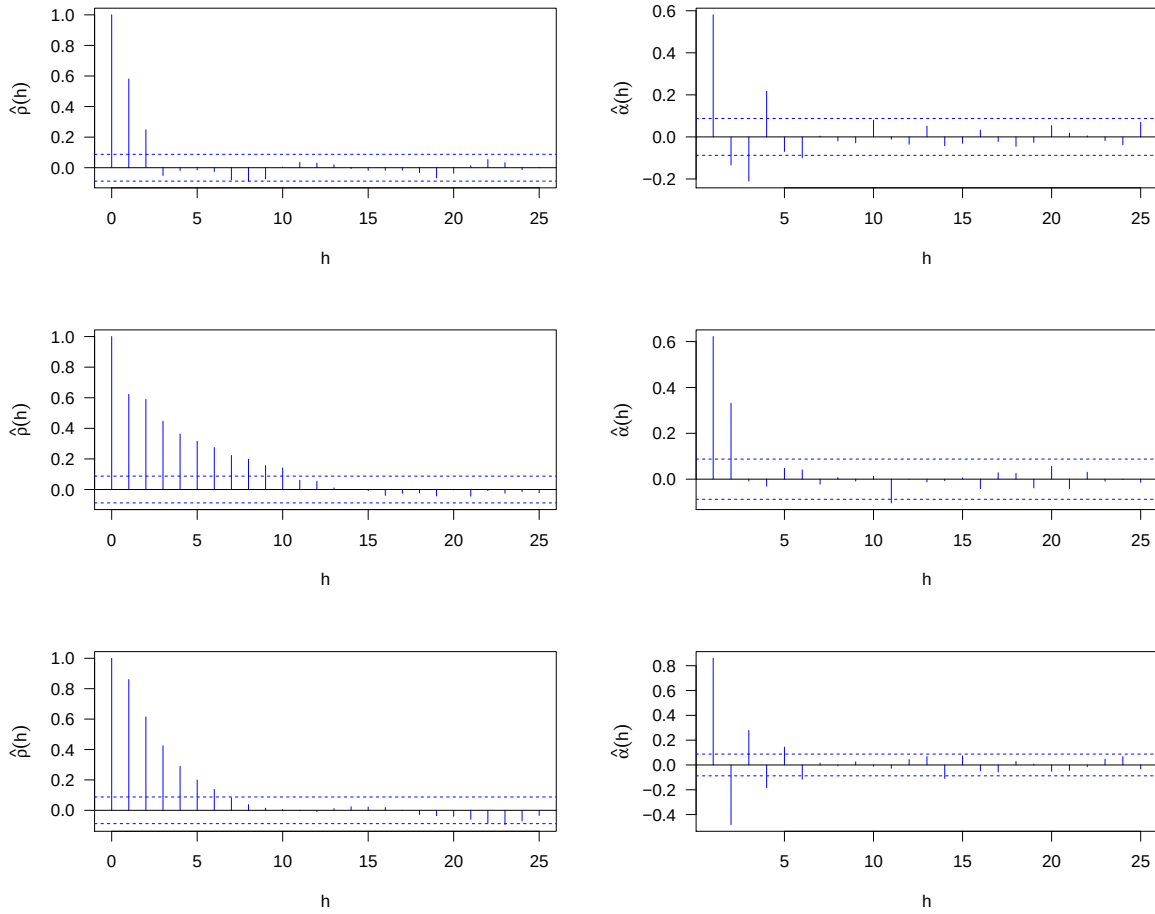
Es sei angenommen, dass die beobachteten Zeitreihenwerte von einem kausalen AR(1)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$ erzeugt wurden. Erläutern Sie, was für die asymptotische Varianz des resultierenden ML-Schätzers $\hat{\phi}$ gilt, wenn anstelle eines kausalen AR(1)-Prozesses ein kausaler und invertierbarer ARMA(1,1)-Prozess an die Daten angepasst wird, also Overfitting stattfindet.

Aufgabe 6

- a) Ermitteln Sie anhand der folgenden drei Paare bestehend aus empirischer Autokorrelationsfunktion $\hat{\rho}(h)$ und empirischer partieller Autokorrelationsfunktion $\hat{\alpha}(h)$ geeignete Werte für die Ordnungsparameter p und q des jeweils zugrundeliegenden datengenerierenden ARMA(p, q)-Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. (Beachte: $\hat{\alpha}(h)$ standardmäßig erst ab Lag $h = 1$).



- b) Ermitteln Sie anhand des folgenden R-Outputs geeignete Werte für die Ordnungsparameter p und q des zugrundeliegenden datengenerierenden ARMA(p, q)-Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.
- c) Die folgende Tabelle enthält die AIC-Werte von 16 angepassten ARMA(p, q)-Prozessen mit $p, q \in \{0, 1, 2, 3\}$. Geben Sie geeignete Werte für die Ordnungsparameter p und q des zugrundeliegenden datengenerierenden ARMA(p, q)-Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ an.

p	q	$l(\hat{\phi}_p, \hat{\theta}_q, \hat{\sigma}^2; \mathbf{x}_T)$	AIC
0	0	-4637,23	9278,46
0	1	-3633,71	7273,42
0	2	-3240,87	6489,75
0	3	-3062,80	6135,60
1	0	-3090,99	6187,98
1	1	-2916,48	5840,95
1	2	-2916,33	5842,66
1	3	-2916,32	5844,65
2	0	-2957,24	5922,48
2	1	-2916,33	5842,66
2	2	-2916,06	5844,11
2	3	-2916,03	5846,06
3	0	-2923,41	5856,82
3	1	-2916,33	5844,66
3	2	-2915,59	5845,17
3	3	-2915,42	5846,83

```

1  z test of coefficients:
2      Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
3  ar1      1.45788    0.32222  4.5245 6.054e-06 ***
4  ar2     -0.52045    0.26030 -1.9994  0.04557 *
5  ma1     -0.17612    0.32013 -0.5502  0.58222
6  ma2     -0.33728    0.15206 -2.2180  0.02655 *
7
8  z test of coefficients:
9      Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
10 ar1      0.773643   0.050541 15.3071 <2e-16 ***
11 ar2      0.025439   0.047640  0.5340  0.5933
12 ma1      0.509678   0.044803 11.3761 <2e-16 ***
13
14 z test of coefficients:
15      Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
16 ar1      0.799538   0.014533 55.014 <2e-16 ***
17 ma1      0.488295   0.021578 22.630 <2e-16 ***
18
19 z test of coefficients:
20      Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
21 ar1      0.887175   0.010291 86.2063 <2e-16 ***
22 ---
23 Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Übung 7: Prognose von ARMA-Prozessen

Aufgabe 1

Es seien X und ε stochastisch unabhängige $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen. Ferner sei

$$Y = X^2 + \varepsilon.$$

- Berechnen Sie den Minimum Mean Square Error Predictor $\hat{Y}^{\text{opt}}$ von Y auf Basis der Beobachtung X . Ermitteln Sie ferner den Mean Square Error of Prediction (MSEP) von $\hat{Y}^{\text{opt}}$.
- Zur Prognose von Y werden nun ausschließlich affin-lineare Prädiktoren der Form $\hat{Y} = a + bX$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ betrachtet. Berechnen Sie den besten affin-linearen Prädiktor $\hat{Y}^{\text{lin}}$ und seinen MSEP. Kommentieren Sie das Ergebnis kurz.

Hinweis: Für eine $N(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}[X^4] = 3$.

Aufgabe 2

Betrachtet wird der MA(3)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t + 0,7\varepsilon_{t-1} - 0,3\varepsilon_{t-2} + 0,2\varepsilon_{t-3}$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, 50)$. Bestimmen Sie den besten affin-linearen Prädiktor $\hat{X}_{T+h|T}^{\text{lin}}$ mit dem Prognoseursprung $T = 2$ und dem Prognosehorizont $h = 2$.

Aufgabe 3

Es sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess mit $\mu = \mathbb{E}[X_t] = 0$ für $t \in \mathbb{Z}$. Ermitteln Sie für die beiden folgenden Fälle den besten affin-linearen Prädiktor $\hat{X}_t^{\text{lin}}$ für X_t auf Basis der beiden Beobachtungen X_{t-1} und X_{t+1} sowie seinen Mean Square Error of Prediction (MSEP).

- Bei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ handelt es sich um einen kausalen AR(1)-Prozess mit

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

- Bei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ handelt es sich um einen invertierbaren MA(1)-Prozess mit

$$X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$.

Aufgabe 4

Betrachtet wird der kausale AR(2)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = 1,3X_{t-1} - 0,4X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, 2)$. Bestimmen Sie den besten affin-linearen Prädiktor $\hat{X}_{T+h|T}^{\text{lin}}$ mit Prognoseursprung $T > 2$ für die Prognosehorizonte $h = 1, 2, 3$.

Aufgabe 5

Für eine schwach stationäre Zeitreihe $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit $\mathbb{E}[X_t] = 0$ soll zum Zeitpunkt T die Zufallsvariable X_{T+h} für $h \in \mathbb{N}$ prognostiziert werden.

- Als Prädiktor für X_{T+h} soll aX_T für ein geeignetes $a \in \mathbb{R}$ verwendet werden. Zeigen Sie, dass der Mean Square Error of Prediction (MSEP)

$$\text{MSEP}(a) = \mathbb{E}[(X_{T+h} - aX_T)^2]$$

für $a = \rho(h)$ minimiert wird.

- Zeigen Sie, dass gilt

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \text{MSEP}(a) = \gamma(0) (1 - \rho^2(h)).$$

Aufgabe 6

Es sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein invertierbarer MA(1)-Prozess mit

$$X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

und $\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$.

- a) Bestimmen Sie den Ein-Schritt-Prädiktor (Minimum Mean Square Error Predictor) $\tilde{X}_{T+1|T}^{\text{opt}}$ bei Vorliegen der unendlichen Vergangenheit. Berechnen Sie ferner den MSEP von $\tilde{X}_{T+1|T}^{\text{opt}}$.
- b) Zeigen Sie, dass für den MSEP des trunkierten Ein-Schritt-Prädiktors $\tilde{X}_{T+1|T}^{\text{opt}*}$ gilt:

$$\mathbb{E} \left[\left(X_{T+1} - \tilde{X}_{T+1|T}^{\text{opt}*} \right)^2 \right] = \sigma^2 (1 + \theta^{2+2T})$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus Aufgabenteil a).

Übung 8: ARCH- und GARCH-Prozesse

Aufgabe 1

Es sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer ARCH(p)-Prozess mit $\mathbb{E}[\sigma_t^4] = c < \infty$ und $\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] = d < \infty$. Zeigen Sie, dass es sich dann bei $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\eta_t := X_t^2 - \sigma_t^2$$

um ein weißes Rauschen handelt.

Aufgabe 2

Betrachtet wird ein schwach stationärer ARCH(1)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \text{und} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2.$$

- a) Zeigen Sie, dass die quadrierten Zufallsvariablen X_t^2 für alle $t \in \mathbb{Z}$ die Darstellung

$$X_t^2 = \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \varepsilon_t^2 \cdot \dots \cdot \varepsilon_{t-j}^2 \quad (1)$$

besitzen und interpretieren Sie diese Darstellung.

- b) Berechnen Sie mit Hilfe von (1) das zweite Moment $\mathbb{E}[X_t^2]$.

Aufgabe 3

Betrachtet wird ein schwach stationärer GARCH(1,1)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \text{und} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

und $\mathbb{E}[X_t^4] < \infty$ für $t \in \mathbb{Z}$.

- a) Stellen Sie den quadrierten Prozess $(X_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ als ARMA(1,1)-Prozess dar.
- b) Erläutern Sie, ob dieser GARCH-Prozess eine ARCH(∞)-Darstellung besitzt, und ermitteln Sie diese Darstellung gegebenenfalls.
- c) Es gelte nun zusätzlich $\varepsilon_t \sim \text{IIN}(0, 1)$. Weisen Sie nach, dass die Kurtosis $K(X_t)$ genau dann existiert, wenn $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$ gilt. Zeigen Sie ferner, dass diese dann gegeben ist durch

$$K(X_t) = 3 + \frac{6\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2} > 3.$$

Hinweis: Für $Y \sim N(0, 1)$ gilt $\mathbb{E}[Y^4] = 3$.

- d) Bestimmen Sie die bedingte Volatilität $\mathbb{E}[\sigma_{t+h}^2 | \mathcal{F}_t]$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ und $h \in \mathbb{N}$ und weisen Sie nach, dass sie für $h \rightarrow \infty$ mit der unbedingten Volatilität $\mathbb{E}[\sigma_{t+h}^2]$ übereinstimmt.

Aufgabe 4

Betrachtet wird ein schwach stationärer GARCH(3,2)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \text{und} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^3 \alpha_j X_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^2 \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

sowie

$$\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, 1) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[X_t^4] < \infty \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ermitteln Sie die ARMA(3,2)-Darstellung des quadrierten Prozesses $(X_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Aufgabe 5

Betrachtet wird ein IGARCH(1,1)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \text{und} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

sowie

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_t \sim \text{IID}(0, 1) \quad \text{für } t \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[\sigma_{t+h}^2 | \mathcal{F}_{t-1}] = h\alpha_0 + \sigma_t^2 \quad \text{für } h \in \mathbb{N}_0$$

gilt, und interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Aufgabe 6

Betrachtet wird ein schwach stationärer ARCH(1)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \text{und} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$$

sowie $\alpha_0 \geq 0$ und $0 < \alpha_1 < 1$. Ferner sei das weiße Rauschen $\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, 1)$ stetig gleichverteilt auf dem Intervall $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

- a) Es gelte zusätzlich $\mathbb{E}[X_t^4] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Schiefe und die Kurtosis der Zufallsvariablen X_t .

Hinweis: Für eine auf dem Intervall $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ stetig gleichverteilte Zufallsvariable Y gilt $\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] = 1$ und $\mathbb{E}[Y^4] = \frac{9}{5}$.

- b) Geben Sie an, für welche Werte von α_1 die Kurtosis der Zufallsvariablen X_t existiert.
- c) Bestimmen Sie für welche Werte von α_1 der ARCH(1)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sogar stark stationär ist. Interpretieren Sie ferner das Ergebnis.

Hinweis: Es gilt $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$ und $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

Aufgabe 7

Weisen Sie mittels vollständiger Induktion nach, dass sich bei einem schwach stationären GARCH(1,1)-Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ die rekursive Prognoseformel

$$\hat{\sigma}_{T+1}^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 X_T^2 + \hat{\beta}_1 \hat{\sigma}_T^2 \quad \text{bzw.} \quad \hat{\sigma}_{T+h}^2 = \hat{\alpha}_0 + (\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1) \hat{\sigma}_{T+h-1}^2 \quad \text{für } h > 1$$

in der expliziten Form

$$\hat{\sigma}_{T+h}^2 = \hat{\sigma}^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1} (\hat{\sigma}_{T+1}^2 - \hat{\sigma}^2) \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}^2 := \frac{\hat{\alpha}_0}{1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\beta}_1} \quad \text{für } h \geq 1$$

darstellen lässt.

Übung 9: Multivariate Zeitreihenanalyse

Aufgabe 1

Es sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein kausaler AR(1)-Prozess mit

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$. Bestimmen Sie die Kreuzkovarianzfunktion $\gamma_{X\varepsilon}(h)$ und die Kreuzkorrelationsfunktion $\rho_{X\varepsilon}(h)$ des schwach stationären bivariaten Prozesses $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} X_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie ferner die Kreuzkorrelation $\rho_{X\varepsilon}(0)$.

Hinweis: Verwenden Sie $\gamma_X(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$ und die MA(∞)-Darstellung $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$ des AR(1)-Prozesses $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Aufgabe 2

Es sei $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer bivariater Prozess mit

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$$

sowie $\varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$. Ferner seien $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ und $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ unkorreliert. Ermitteln Sie die Kovarianzfunktion $\mathbf{\Gamma}(h)$ des bivariaten Prozesses $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Aufgabe 3

Es sei $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein multivariater stochastischer Prozess mit

$$\mathbf{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$$

und $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$. Ferner sei angenommen, dass die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der $n \times n$ -Matrix $\mathbf{\Phi}$ betragsmäßig kleiner als 1 sind.

- a) Zeigen Sie, dass es sich bei $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ um einen wohldefinierten multivariaten linearen Prozess handelt. Unterstellen Sie hierbei, dass die Matrix $\mathbf{\Phi}$ diagonalisierbar ist. D.h. dass es eine invertierbare Matrix $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so dass $\mathbf{\Phi} = \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^{-1}$ gilt, wobei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $\mathbf{\Phi}$ auf der Hauptdiagonalen ist.

Hinweis: Die Aussage ist auch allgemein gültig, d.h. wenn $\mathbf{\Phi}$ nicht diagonalisierbar ist. Im allgemeinen Fall muss jedoch die Jordansche Normalform einer quadratischen Matrix verwendet werden, was den Nachweis der Aussage aufwendiger gestaltet.

- b) Weisen Sie nach, dass der Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine schwach stationäre Lösung der linearen Differenzengleichung

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{\Phi} \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad \text{für } t \in \mathbb{Z}$$

ist.

- c) Geben Sie die Mittelwertfunktion $\boldsymbol{\mu}_t$ und die Kovarianzfunktion $\mathbf{\Gamma}(h)$ von $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ an. Erläutern Sie, wie mit Hilfe dieses Ergebnisses bei bekannter Varianz-Kovarianzmatrix $\mathbf{\Gamma}(0)$ und bekannter Matrix $\mathbf{\Phi}$ die Kovarianzfunktion $\mathbf{\Gamma}(h)$ für $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ berechnet werden kann. Bestimmen Sie ferner eine Bestimmungsgleichung für die Varianz-Kovarianzmatrix $\mathbf{\Gamma}(0)$ für den Fall, dass die Matrizen $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Sigma}$ bekannt sind.

Aufgabe 4

Betrachtet wird ein kausaler bivariater VAR(2)-Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\mathbf{X}_t = \Phi_1 \mathbf{X}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{X}_{t-2} + \varepsilon_t \quad (1)$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \Sigma)$.

- a) Ermitteln Sie die ersten vier Matrizen Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 und Ψ_3 der VMA(∞)-Darstellung von $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.
- b) Bestimmen Sie für $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ die Yule-Walker-Gleichungen (vgl. hierzu Abschnitt 3.4).
- c) Für die beiden Matrizen Φ_1 und Φ_2 in (1) gelte nun

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,5 \\ 0,1 & -0,5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} -0,3 & -0,3 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

und die Varianz-Kovarianzmatrix des (multivariaten) weißen Rauschens $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sei gegeben durch

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,4 \\ 0,4 & 2,0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob der bivariate VAR(2)-Prozess bei Wahl dieser Matrizen weiterhin kausal ist bzgl. $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Falls ja, berechnen Sie die ersten vier Matrizen Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 und Ψ_3 der VMA(∞)-Darstellung von $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

- d) Ermitteln Sie die besten affin-linearen Prädiktoren $\hat{\mathbf{X}}_{T+1|T}^{\text{lin}}$ und $\hat{\mathbf{X}}_{T+2|T}^{\text{lin}}$.

Aufgabe 5

Betrachtet wird der bivariate VARMA(1,1)-Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\mathbf{X}_t = \Phi \mathbf{X}_{t-1} + \varepsilon_t + \Theta \varepsilon_{t-1} \quad (2)$$

und $\varepsilon_t \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \Sigma)$. Für die Matrizen Φ und Θ gelte ferner

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{E} - \Phi \mathbf{L})^{-1} = (\mathbf{E} + \Phi \mathbf{L})$ gilt.
- b) Weisen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil a) nach, dass der VARMA(1,1)-Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine Darstellung als VMA(1)-Prozess besitzt. Interpretieren Sie das Ergebnis kurz.
- c) Untersuchen Sie, ob der VARMA(1,1)-Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ kausal und invertierbar ist.