Übung 1: Grundlagen der Zeitreihenanalyse

Aufgabe 1

Betrachtet wird der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = U_1 \sin(2\pi\delta t) + U_2 \cos(2\pi\delta t),$$

wobei U_1 und U_2 stochastisch unabhängig sind mit

$$\mathbb{E}[U_1] = \mathbb{E}[U_2] = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Var}(U_1) = \operatorname{Var}(U_2) = \sigma^2.$$

Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ schwach stationär ist.

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie das Additionstheorem $\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta)$.

Aufgabe 2

Weisen Sie nach, dass der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sin(2\pi U t)$$

und einer auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen U schwach stationär ist.

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie das Additionstheorem $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$.

Aufgabe 3

Betrachtet wird der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$. Bestimmen Sie die Mittelwert- und Autokovarianzfunktion von $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ und geben Sie an, ob $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ schwach stationär ist.

Aufgabe 4

Gegeben sei der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = (-1)^t Y,$$

wobei Y eine Zufallsvariable ist. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für Y an, so dass der Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ schwach stationär ist.

Aufgabe 5

Es seien $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ zwei schwach stationäre und unkorrelierte Prozesse. Zeigen Sie, dass dann auch der stochastische Prozess $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit $Z_t := X_t + Y_t$ schwach stationär ist.

Aufgabe 6

Gegeben sei der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

sowie $\theta \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$. Durch $M_{\varepsilon_t}(s) := \mathbb{E}\big[e^{s\varepsilon_t}\big]$ sei die momenterzeugende Funktion der Zufallsvariablen ε_t für $t \in \mathbb{Z}$ gegeben.

a) Drücken Sie die momenterzeugende Funktion

$$M_{(X_1,\ldots,X_n)}(s_1,\ldots,s_n) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{t=1}^{n} s_t X_t\right)\right]$$

des Zufallsvektors $(X_1,\ldots,X_n)^T$ mit Hilfe von $M_\varepsilon(s)$ aus.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses des Aufgabenteils a), dass $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein stark stationärer stochastischer Prozess ist.

Übung 2: Klassische Komponentenmodelle

Aufgabe 1

Die Zeitreihe $(x_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sei gegeben durch

$$300, \quad 370, \quad 390, \quad 400, \quad 420, \quad 450, \quad 470.$$

Es wird das additive Komponentenmodell ohne Saison zugrunde gelegt.

a) Berechnen Sie eine Regressionsgerade als Schätzung für die glatte Komponente $(g_t)_{t\in\mathbb{T}}$ der Zeitreihe und stellen Sie diese zusammen mit der Zeitreihe $(x_t)_{t\in\mathbb{T}}$ graphisch dar.

b) Geben Sie die trendbereinigte Zeitreihe an.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil a) eine Prognose für den Zeitreihenwert zum Zeitpunkt $t = 10$.

d) Berechnen Sie mit Hilfe des einfachen gleitenden 3er-Durchschnitts eine Schätzung für die glatte Komponente $(g_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

Aufgabe 2

Die folgende Tabelle enthält die vierteljährlichen Bauinvestitionen in Ostdeutschland $(x_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ in Mrd. Euro für die Jahre 1991 bis 2002 zu Preisen von 1995:

Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$
1991/1	1	7,44	1992/1	5	11,05	1993/1	9	12,73	1994/1	13	16,25
1991/2	2	8,92	1992/2	6	12,99	1993/2	10	15,67	1994/2	14	19,55
1991/3	3	9,40	1992/3	7	13,29	1993/3	11	16,30	1994/3	15	19,93
1991/4	4	8,87	1992/4	8	12,22	1993/4	12	14,61	1994/4	16	18,00
Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$
1995/1	17	17,53	1996/1	21	14,86	1997/1	25	15,14	1998/1	29	15,05
1995/2	18	20,14	1996/2	22	20,34	1997/2	26	19,51	1998/2	30	17,01
1995/3	19	20,29	1996/3	23	21,18	1997/3	27	19,73	1998/3	31	18,01
1995/4	20	17,54	1996/4	24	18,21	1997/4	28	16,91	1998/4	32	15,61
Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$
1999/1	33	13,64	2000/1	37	13,23	2001/1	41	11,29	2002/1	45	10,11
1999/2	34	16,16	2000/2	38	14,57	2001/2	42	12,74	2002/2	46	
1999/3	35	17,10	2000/3	39	14,99	2001/3	43	13,29	2002/3	47	
1999/4	36	15,05	2000/4	40	12,89	2001/4	44	11,53	2002/4	48	

Im Folgenden wird das additive Komponentenmodell ohne Saison zugrunde gelegt.

a) Berechnen Sie mittels Regressionsanalyse eine Schätzung für die glatte Komponente $(g_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ der Zeitreihe $(x_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$. Verwenden Sie hierbei als Regressionsfunktion eine quadratische Funktion

$$f(t;\boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2.$$

Stellen Sie ferner die Zeitreihe $(x_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ und die Schätzung für die glatte Komponente $(\widehat{g}_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ gemeinsam in einer Abbildung dar.

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden Summenformeln:

$$\sum_{t=1}^{T} t = \frac{T(T+1)}{2}$$

$$\sum_{t=1}^{T} t^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6}$$

$$\sum_{t=1}^{T} t^3 = \frac{T^2(T+1)^2}{4}$$

$$\sum_{t=1}^{T} t^4 = \frac{T(T+1)(2T+1)(3T^2+3T-1)}{30}$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil a) Prognosen für die vierteljährlichen Bauinvestitionen in den nächsten 3 Quartalen.

Aufgabe 3

Für den stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ gelte

$$X_t = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_t \qquad \text{für } t \in \mathbb{Z}$$

mit $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

a) Untersuchen Sie, ob $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mittelwert-, varianz- und kovarianzstationär sowie schwach stationär ist.

b) Zeigen Sie, dass $(\Delta X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ schwach stationär ist.

c) Ermitteln Sie für den einfachen gleitenden $(2r+1)$-Durchschnitt $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$Y_t = \frac{1}{2r+1} \sum_{u=-r}^{r} X_{t-u}$$

den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y_t]$.

d) Bestimmen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma(h)$ von $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 4

In der folgenden Tabelle sind die Vierteljahresumsätze $(x_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ eines Spirituosenherstellers für die Jahre 2011 bis 2018 zusammengefasst.

Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$
2011/1	1	54,8	2012/1	5	53,6	2013/1	9	56,8	2014/1	13	58,2
2011/2	2	42,6	2012/2	6	44,4	2013/2	10	48,6	2014/2	14	52,6
2011/3	3	57,4	2012/3	7	59,6	2013/3	11	60,2	2014/3	15	61,0
2011/4	4	60,0	2012/4	8	64,8	2013/4	12	68,4	2014/4	16	69,2
Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$	Quartal	t	$x_{t,l}$
2015/1	17	60,4	2016/1	21	64,2	2017/1	25	63,8	2018/1	29	66,0
2015/2	18	52,8	2016/2	22	54,6	2017/2	26	54,0	2018/2	30	56,0
2015/3	19	64,0	2016/3	23	62,2	2017/3	27	66,4	2018/3	31	64,8
2015/4	20	68,2	2016/4	24	71,0	2017/4	28	72,8	2018/4	32	74,0

Im Folgenden wird das additive Komponentenmodell mit konstanter Saisonfigur unterstellt.

a) Stellen Sie die Zeitreihe $(x_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ graphisch dar.

b) Ermitteln Sie mittels des einfachen gleitenden 5-er Durchschnitts

$$\mathrm{Smooth}(x_t) = \frac{1}{8}x_{t-2} + \frac{1}{4}x_{t-1} + \frac{1}{4}x_t + \frac{1}{4}x_{t+1} + \frac{1}{8}x_{t+2}$$

eine Schätzung $(\widehat{g}_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ für die glatte Komponente $(g_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ der Zeitreihe $(x_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ und stellen Sie diese Schätzung zusammen mit der Zeitreihe graphisch dar.

c) Zeichnen Sie die trendbereinigte Zeitreihe $(x_{t,l} - \widehat{g}_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ und bestimmen Sie mit Hilfe des Phasendurchschnittsverfahrens eine Schätzung $(\widehat{s}_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ für die Saisonkomponente $(s_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$. Stellen Sie die geschätzte Saisonkomponente und die saisonbereinigte Zeitreihe $(x_{t,l} - \widehat{s}_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ graphisch dar und interpretieren Sie das Ergebnis kurz.

d) Untersuchen Sie mit Hilfe von `R` die Güte des angepassten additiven Komponentenmodells mit Saison anhand der Residuen $(\widehat{\varepsilon}_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Verwenden Sie hierzu einen Plot der Residuen $(\widehat{\varepsilon}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, die empirische Autokorrelationsfunktion $\widehat{\rho}(h)$, einen QQ-Plot, einen Shapiro-Wilk-Test und einen Jarque-Bera-Test. Kommentieren Sie ferner Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 5

Es werden wieder die Vierteljahresumsätze $(x_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ eines Spirituosenherstellers fär die Jahre 2011 bis 2018 aus Aufgabe 4 betrachtet und das additive Komponentenmodell mit konstanter Saisonfigur unterstellt.

a) Passen Sie an die Zeitreihenwerte $(x_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ eine geeignete Regressionsfunktion mit Saisondummies an. Stellen Sie ferner die Zeitreihe $(x_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ zusammen mit der angepassten Regressionsfunktion graphisch dar.

b) Ermitteln Sie Schätzungen für die normierten Saisonkoeffizienten (normierte Phasendurchschnitte).

c) Berechnen Sie Prognosen für die nächsten vier Quartale.

Aufgabe 6

In der folgenden Tabelle sind die Tagespreise $(x_t)_{t\in\mathbb{T}}$ für eine Feinunze Gold in US$ vom 28.07.2011 bis 24.08.2011 zusammengefasst.

Tag	t	$	Tag	t	$
28.07.2011	1	1588,00	11.08.2011	11	1754,00
29.07.2011	2	1626,10	12.08.2011	12	1745,40
01.08.2011	3	1619,05	15.08.2011	13	1764,60
02.08.2011	4	1658,40	16.08.2011	14	1786,00
03.08.2011	5	1658,00	17.08.2011	15	1791,30
04.08.2011	6	1650,10	18.08.2011	16	1825,10
05.08.2011	7	1661,00	19.08.2011	17	1848,60
08.08.2011	8	1720,10	20.08.2011	18	1895,60
09.08.2011	9	1732,60	23.08.2011	19	1824,40
10.08.2011	10	1792,80	24.08.2011	20	1806,50

a) Bestimmen Sie mittels exponentieller Glättung eine Schätzung für die glatte Komponente $(g_t)_{t\in\mathbb{T}}$ der Zeitreihe $(x_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Verwenden Sie hierzu den Startwert $\widehat{g}_1 = x_1$ und die Glättungsparameter $\alpha = 0{,}15$ bzw. $\alpha = 0{,}4$. Stellen Sie die beiden Schätzungen für die glatte Komponente $(\widehat{g}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ zusammen mit der Zeitreihe $(x_t)_{t\in\mathbb{T}}$ graphisch dar und kommentieren Sie das Ergebnis.

b) Bestimmen Sie mittels Verfahren von Holt eine Schätzung für die glatte Komponente $(g_t)_{t\in\mathbb{T}}$ der Zeitreihe $(x_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Verwenden Sie hierzu die Startwerte $\widehat{m}_1 = x_1$ und $\widehat{b}_1 = 0$ sowie die Glättungsparameter $\alpha = 0{,}3$ und $\beta = 0{,}5$. Stellen Sie die Schätzung für die glatte Komponente $(\widehat{g}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ zusammen mit der Zeitreihe $(x_t)_{t\in\mathbb{T}}$ graphisch dar.

c) Berechnen Sie eine Prognose für die Zeitpunkte $t = 25$ und $t = 30$.

Aufgabe 7

Es wird eine Zeitreihe $(x_{t,l})_{t\in\mathbb{T}}$ bestehend aus Monatswerten betrachtet. Zum Zeitpunkt $T = 49$ seien der Zeitreihenwert $x_{49,1} = 40{,}0$, die Schätzungen

$$\widehat{m}_{48} = 67{,}4 \qquad \text{bzw.} \qquad \widehat{b}_{48} = 0{,}779$$

für das Niveau und die Niveauveränderung sowie die Schätzungen

$$\begin{aligned}
&\widehat{s}_{37,1} = 0{,}756, \quad \widehat{s}_{38,2} = 0{,}458, \quad \widehat{s}_{39,3} = 0{,}855, \quad \widehat{s}_{40,4} = 1{,}157\\
&\widehat{s}_{41,5} = 1{,}539, \quad \widehat{s}_{42,6} = 1{,}556, \quad \widehat{s}_{43,7} = 1{,}561, \quad \widehat{s}_{44,8} = 1{,}525\\
&\widehat{s}_{45,9} = 1{,}293, \quad \widehat{s}_{46,10} = 0{,}882, \quad \widehat{s}_{47,11} = 0{,}795, \quad \widehat{s}_{48,12} = 0{,}672
\end{aligned}$$

für die Saisonkomponenten bekannt. Die Glättungsparameter seien gegeben durch $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}05$ und $\gamma = 0{,}35$. Berechnen Sie aus diesen Angaben Prognosen für die Zeitpunkte $t = 50$ und $t = 54$. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Saisonkomponente multiplikativ mit der glatten Komponente verknüpft ist.

Übung 3: MA-Prozesse

Aufgabe 1

Weisen Sie nach, dass die absolute Summierbarkeit einer unendlichen Reihe stets die quadratische Summierbarkeit der unendlichen Reihe impliziert. D.h. es gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\eta_j| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^2 < \infty.$$

Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Umkehrung der obigen Aussage nicht gilt.

Aufgabe 2

Geben Sie an, um was für einen stochastischen Prozess es sich bei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t + 0{,}7\varepsilon_{t-1} - 0{,}3\varepsilon_{t-2} + 0{,}2\varepsilon_{t-3}$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, 50)$ handelt. Bestimmen Sie ferner die Autokovarianzfunktion $\gamma(h)$ von $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 3

Ermitteln Sie für welche Werte $\theta \in \mathbb{R}$ die Autokorrelation $\rho(\pm 1)$ des MA(1)-Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

sein Maximum bzw. Minimum annimmt. Zeigen Sie ferner, dass

$$|\rho(\pm 1)| \leq \frac{1}{2}$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für welche Wertepaare $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ ein MA(2)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 5

Betrachtet wird der MA(1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

a) Geben Sie die Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion $\gamma(h)$ bzw. $\rho(h)$ von $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ an.

b) Für welche Werte von θ gilt $\rho(1) = 0{,}4$ und welcher dieser Werte ist zu bevorzugen?

c) Anstelle eines MA(1)-Modells genüge der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ nun dem MA(∞)-Modell

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} c\,\varepsilon_{t-j},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Weisen Sie nach, dass der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ nicht schwach stationär ist.

d) Betrachtet wird wieder der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ aus Aufgabenteil c). Zeigen Sie, dass der aus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ durch Differenzenbildung resultierende stochastische Prozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit $Y_t = \Delta X_t$ ein schwach stationärer MA(1)-Prozess ist.

e) Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion des stochastischen Prozesses $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ aus Aufgabenteil d).

Übung 4: AR-Prozesse

Aufgabe 1

Ermitteln Sie für den schwach stationären AR(1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = 0{,}8X_{t-1} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$ die Varianz des nicht zentrierten 4-er Durchschnitts $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$Y_t = \frac{1}{4}X_{t-2} + \frac{1}{4}X_{t-1} + \frac{1}{4}X_t + \frac{1}{4}X_{t+1}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für den AR(2)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = -0{,}9X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$ das zugehörige Autoregressive Polynom $\Phi_2(z)$ sowie dessen Nullstellen in Polardarstellung. Stellen Sie die Autokorrelationsfunktion $\rho(h)$ als Funktion dieser Nullstellen dar und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3

Betrachtet wird der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = -2X_{t-1} - \frac{5}{4}X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$.

a) Geben Sie an, um was für einen Prozess es sich bei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ handelt. Geben Sie ferner den zugehörigen Autoregressiven-Operator sowie Moving-Average-Operator an. Stellen Sie $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit Hilfe dieser beiden Operatoren dar.

b) Untersuchen Sie den Prozess auf Parameterredundanz, schwache Stationarität, Kausalität und Invertierbarkeit.

Aufgabe 4

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten die MA(∞)-Darstellung des kausalen AR(2)-Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = 1{,}3X_{t-1} - 0{,}4X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$.

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie, dass die Differenzengleichung 2. Ordnung

$$a\psi_{j-1} - b\psi_j + \psi_{j+1} = 0 \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}$$

die Lösung

$$\psi_j = c_1\left(\frac{1}{z_1}\right)^j + c_2\left(\frac{1}{z_2}\right)^j \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}$$

besitzt, wobei z_1 und z_2 die Nullstellen des Polynoms $\Phi_2(z) = 1 - bz + az^2$ sind und $c_1 + c_2 = 1$ gilt.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die partielle Autokorrelationsfunktion $\alpha(h)$ eines kausalen AR(2)-Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$ in Abhängigkeit von den Koeffizienten ϕ_1 und ϕ_2.

Übung 5: ARMA-, ARIMA- und SARIMA-Prozesse

Aufgabe 1

Multiplizieren Sie die beiden folgenden Lag-Polynome aus und benennen Sie die zugehörigen Prozesse minimaler Ordnung:

a) $(1-0{,}2\,\mathrm{L})(1-0{,}6\,\mathrm{L})X_t = (1+0{,}5\,\mathrm{L})\varepsilon_t$

b) $(1-0{,}7\,\mathrm{L})(1-0{,}4\,\mathrm{L}^{12})(1-\mathrm{L})X_t = (1+0{,}5\,\mathrm{L})(1-0{,}4\,\mathrm{L}^{12})\varepsilon_t$

Aufgabe 2

Im Folgenden gelte $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$. Benennen Sie die untenstehenden stochastischen Prozesse:

a) $X_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$

b) $X_t = \frac{13}{10}X_{t-1} + \varepsilon_t$

c) $X_t = \frac{13}{10}X_{t-1} - \frac{2}{5}X_{t-2} + \varepsilon_t$

d) $X_t = \frac{13}{10}X_{t-1} - \frac{2}{5}X_{t-2} + \varepsilon_t - \frac{3}{10}\varepsilon_{t-1}$

e) $X_t = \frac{1}{5}X_{t-1} + \frac{4}{5}X_{t-2} + \varepsilon_t$

f) $X_t = \frac{1}{5}X_{t-1} + \frac{4}{5}X_{t-2} + \varepsilon_t - \frac{3}{2}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2}$

Untersuchen Sie die Prozesse jeweils auf Parameterredundanz, schwache Stationarität, Kausalität und Invertierbarkeit.

Aufgabe 3

Betrachtet wird ein kausaler ARMA$(2,1)$-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = 1{,}3X_{t-1} - 0{,}4X_{t-2} + \varepsilon_t - 0{,}2\varepsilon_{t-1}$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma^2)$.

a) Berechnen Sie mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten die MA(∞)-Darstellung von $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

   Hinweis: Verwenden Sie, dass die Differenzengleichung 2. Ordnung

   $$a\psi_{j-1} - b\psi_j + \psi_{j+1} = 0 \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}$$

   die Lösung

   $$\psi_j = c_1\left(\frac{1}{z_1}\right)^j + c_2\left(\frac{1}{z_2}\right)^j \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}$$

   besitzt, wobei z_1 und z_2 die Nullstellen des Polynoms $\Phi_2(z) = 1 - bz + az^2$ sind und $c_1 + c_2 = 1$ gilt.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil a) die Autokovarianzfunktion von $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 4

Betrachtet wird der stochastische Prozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$Y_t = X_t + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma_\varepsilon^2)$ sowie dem schwach stationären ARMA(p,q)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\Phi_p(\mathrm{L})X_t = \Theta_q(\mathrm{L})\widetilde{\varepsilon}_t$$

und $\widetilde{\varepsilon}_t \sim \mathrm{WN}(0,\sigma_{\widetilde{\varepsilon}}^2)$. Ferner gelte $\mathrm{Cov}(\varepsilon_s,\widetilde{\varepsilon}_t) = 0$ für alle $s,t \in \mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie, dass $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess ist und bestimmen Sie seine Autokovarianzfunktion $\gamma_Y(h)$ in Abhängigkeit von σ_ε^2 und der Autokovarianzfunktion $\gamma_X(h)$ von $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

b) Weisen Sie nach, dass der stochastische Prozess $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$U_t = \Phi_p(\mathrm{L})Y_t$$

ein r-korrelierter Prozess mit $r := \max\{p, q\}$ und damit ein MA(r)-Prozess ist. Was lässt sich daraus für den Prozess $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ folgern?

Aufgabe 5

Es sei der stochastische Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = 0{,}4X_{t-1} + 0{,}45X_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + 0{,}25\varepsilon_{t-2} \tag{1}$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ gegeben.

a) Drücken Sie die Gleichung (1) mit Hilfe des Lag-Operators L aus und geben Sie an, um was für einen Prozess es sich bei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ handelt.

b) Untersuchen Sie $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ auf Parameterredundanz und geben Sie gegebenenfalls an, um was für einen Prozess es sich nach Beseitigung der Parameterredundanz handelt.

c) Untersuchen Sie den Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ auf schwache Stationarität, Kausalität und Invertierbarkeit.

d) Geben Sie die MA(∞)-Darstellung des Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ an, falls er kausal ist.

e) Geben Sie die AR(∞)-Darstellung des Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ an, falls er invertierbar ist.

Aufgabe 6

Betrachtet wird der IMA(1, 1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

sowie $|\theta| < 1$ und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass dieser Prozess die Darstellung

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty}(1-\theta)\theta^{j-1}X_{t-j} + \varepsilon_t$$

besitzt.

Aufgabe 7

Im Folgenden gelte $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. Benennen Sie die drei untenstehenden stochastischen Prozesse und geben Sie jeweils an, ob der Prozess schwach stationär ist:

a) $(1-\mathrm{L})^2(1-\mathrm{L}^{12})X_t = (1 - 0{,}34\mathrm{L} + 0{,}486\mathrm{L}^2)(1 - 0{,}485\mathrm{L}^{12} + 0{,}042\mathrm{L}^{24})\varepsilon_t$

b) $(1 - 0{,}2\mathrm{L})(1 - 0{,}32\mathrm{L}^4 - 0{,}20\mathrm{L}^8)(1-\mathrm{L}^4)X_t = \varepsilon_t$

c) $(1-\mathrm{L}^{12})(1-\mathrm{L})X_t = (1 + \widetilde{\theta}\mathrm{L}^{12})(1 + \theta\mathrm{L})\varepsilon_t$

Aufgabe 8

Betrachtet wird der SARIMA$(0, 0, 1) \times (1, 0, 0)_{12}$-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$(1 - \widetilde{\phi}\mathrm{L}^{12})X_t = (1 + \theta\mathrm{L})\varepsilon_t$$

sowie $|\widetilde{\phi}| < 1$, $|\theta| < 1$ und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

a) Erläutern Sie, ob der SARIMA-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ kausal, invertierbar und/oder schwach stationär ist.

b) Geben Sie den Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ in der ARMA-Parameterisierung an.

c) Bestimmen Sie die Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion von $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Übung 6: Schätzung von ARMA-Prozessen

Aufgabe 1

Für einen schwach stationären stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ wurde der Pfad (die Zeitreihe)

t	X_t
1	4
2	14
3	10
4	16
5	6
6	14
7	10
8	14

beobachtet.

a) Bestimmen Sie die empirische Autokovarianz- und Autokorrelationsfunktion $\widehat{\gamma}(h)$ bzw. $\widehat{\rho}(h)$ für die Lags $h = 0, \ldots, 7$.

b) Bestimmen Sie die empirische partielle Autokorrelationsfunktion $\widehat{\alpha}(h)$ für die Lags $h = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe 2

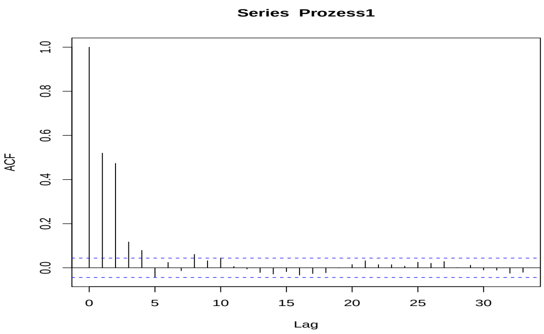
Benennen Sie die folgenden vier stochastischen Prozesse. Ordnen Sie ferner die stochastischen Prozesse den empirischen Autokorrelationsfunktionen und empirischen partiellen Autokorrelationsfunktionen zu und begründen Sie ihre Zuordnung kurz.

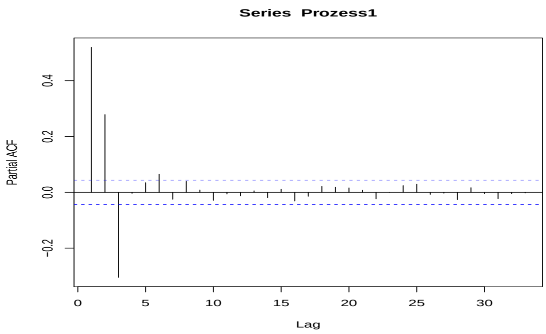
a) $X_t = \frac{3}{4}X_{t-1} + \frac{1}{5}X_{t-3} + \varepsilon_t$

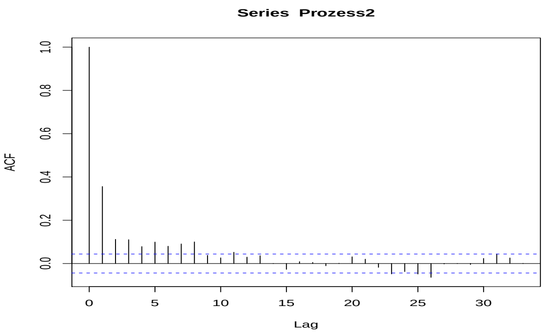
b) $X_t = \varepsilon_t + \frac{1}{4}\varepsilon_{t-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{t-2} - \frac{1}{5}\varepsilon_{t-3}$

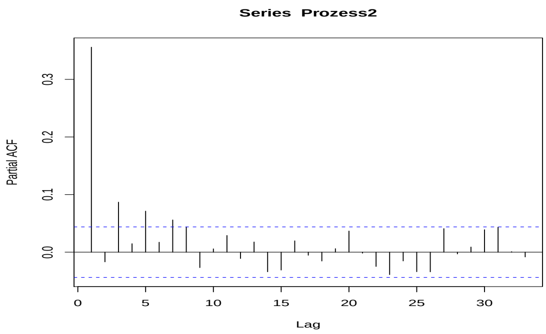
c) $X_t = \frac{9}{20}X_{t-1} + \frac{2}{5}X_{t-2} - \frac{3}{10}X_{t-3} + \varepsilon_t$

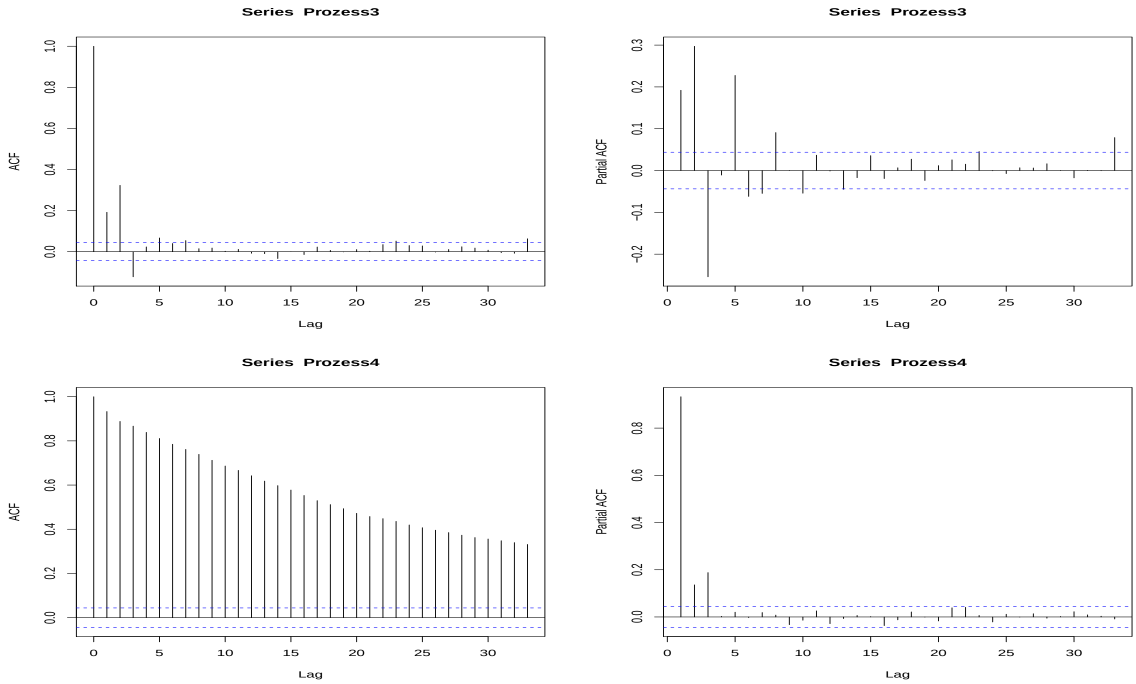
d) $X_t = \frac{4}{5}X_{t-1} + \frac{1}{20}X_{t-2} + \varepsilon_t - \frac{9}{20}\varepsilon_{t-1} - \frac{1}{4}\varepsilon_{t-2}$











Aufgabe 3

a) Für den kausalen AR(2)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim$WN$(0,\sigma^2)$ wurden anhand von $T = 100$ Beobachtungen die Schätzungen $\widehat{\rho}(1) = 0{,}8$ und $\widehat{\rho}(2) = 0{,}5$ sowie

$$\overline{X}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{100} X_t = 2$$

ermittelt. Bestimmen Sie hiermit die Momentenschätzungen für die Parameter ϕ_1, ϕ_2 und μ.

b) Es wird nun der AR(1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim$ WN$(0,\sigma^2)$ betrachtet. Mittels der Momentenmethode wurde für ϕ die Schätzung $\widehat{\phi} = 0{,}7$ ermittelt. Berechnen Sie die benötigte Anzahl T an Beobachtungen, für welche das 95%-Konfidenzintervall von $\widehat{\phi}$ nicht größer als $\widehat{\phi} \pm 0{,}1$ ist.

Aufgabe 4

Es wird der AR(2)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \phi X_{t-1} + \phi^2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim$WN$(0,\sigma^2)$ betrachtet.

a) Ermitteln Sie für welche Werte von ϕ der Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ kausal ist.

b) Anhand von $T = 200$ Beobachtungen wurden die Schätzungen

$$\widehat{\gamma}(0) = 6{,}06, \quad \widehat{\rho}(1) = 0{,}687, \quad \widehat{\rho}(2) = 0{,}610$$

berechnet. Berechnen Sie damit die Yule-Walker-Schätzer für ϕ und σ^2.

Aufgabe 5

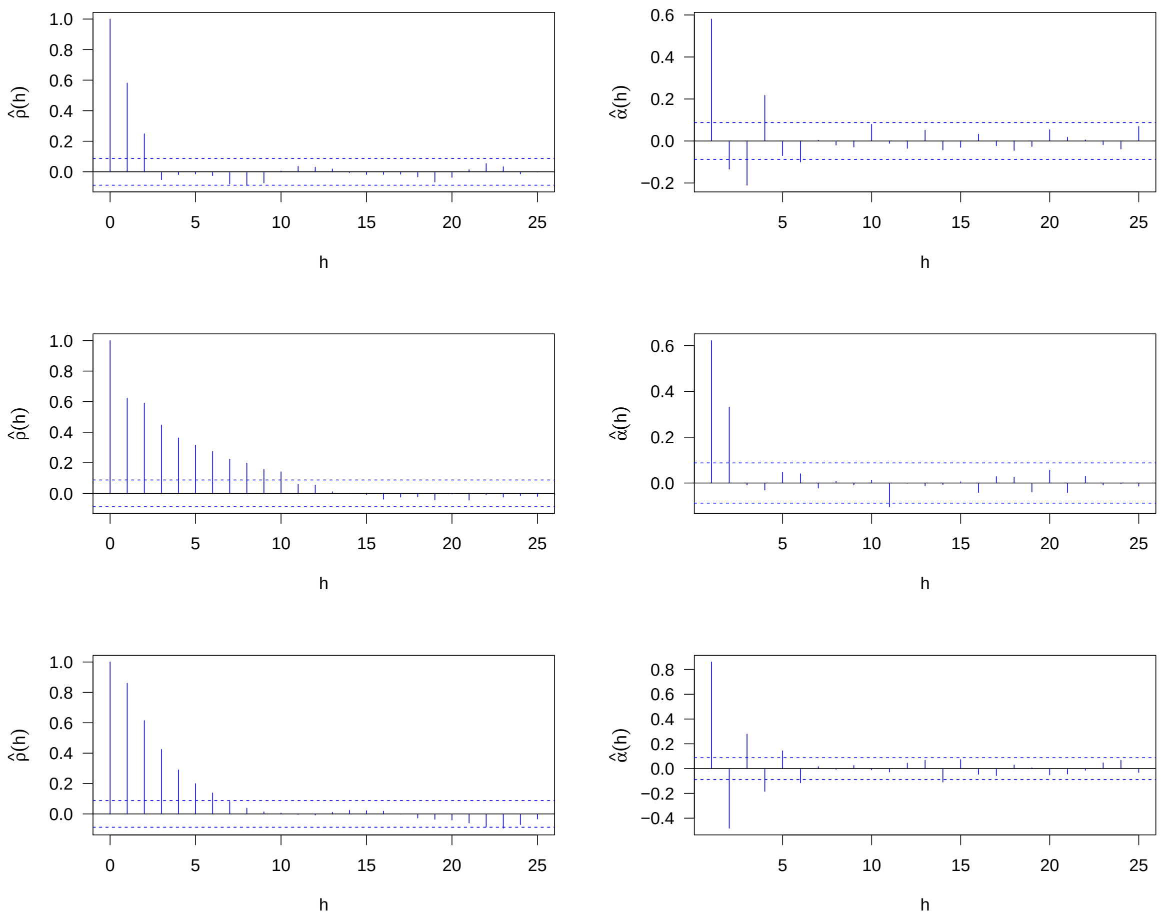
Es sei angenommen, dass die beobachteten Zeitreihenwerte von einem kausalen AR(1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim$ IID$(0,\sigma^2)$ erzeugt wurden. Erläutern Sie, was für die asymptotische Varianz des resultierenden ML-Schätzers $\widehat{\phi}$ gilt, wenn anstelle eines kausalen AR(1)-Prozesses ein kausaler und invertierbarer ARMA$(1,1)$-Prozess an die Daten angepasst wird, also Overfitting stattfindet.

Aufgabe 6

a) Ermitteln Sie anhand der folgenden drei Paare bestehend aus empirischer Autokorrelationsfunktion $\widehat{\rho}(h)$ und empirischer partieller Autokorrelationsfunktion $\widehat{\alpha}(h)$ geeignete Werte für die Ordnungsparameter p und q des jeweils zugrundeliegenden datengenerierenden ARMA(p,q)-Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. (Beachte: `R` plottet $\widehat{\alpha}(h)$ standardmäßig erst ab Lag $h = 1$).



b) Ermitteln Sie anhand des folgenden `R`-Outputs geeignete Werte für die Ordnungsparameter p und q des zugrundeliegenden datengenerierenden ARMA(p,q)-Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

```
z test of coefficients:
          Estimate Std. Error z value  Pr(>|z|)
ar1        1.45788    0.32222  4.5245 6.054e-06 ***
ar2       -0.52045    0.26030 -1.9994   0.04557 *
ma1       -0.17612    0.32013 -0.5502   0.58222
ma2       -0.33728    0.15206 -2.2180   0.02655 *

z test of coefficients:
           Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
ar1        0.773643   0.050541 15.3071   <2e-16 ***
ar2        0.025439   0.047640  0.5340   0.5933
ma1        0.509678   0.044803 11.3761   <2e-16 ***

z test of coefficients:
           Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
ar1        0.799538   0.014533  55.014   <2e-16 ***
ma1        0.488295   0.021578  22.630   <2e-16 ***

z test of coefficients:
           Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
ar1        0.887175   0.010291 86.2063   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

c) Die folgende Tabelle enthält die AIC-Werte von 16 angepassten ARMA(p, q)-Prozessen mit $p, q \in \{0, 1, 2, 3\}$. Geben Sie geeignete Werte für die Ordnungsparameter p und q des zugrundeliegenden datengenerierenden ARMA(p, q)-Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ an.

p	q	$l\left(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_p, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_q, \widehat{\sigma}^2; \mathbf{x}_T\right)$	AIC
0	0	$-4637{,}23$	9278,46
0	1	$-3633{,}71$	7273,42
0	2	$-3240{,}87$	6489,75
0	3	$-3062{,}80$	6135,60
1	0	$-3090{,}99$	6187,98
1	1	$-2916{,}48$	5840,95
1	2	$-2916{,}33$	5842,66
1	3	$-2916{,}32$	5844,65
2	0	$-2957{,}24$	5922,48
2	1	$-2916{,}33$	5842,66
2	2	$-2916{,}06$	5844,11
2	3	$-2916{,}03$	5846,06
3	0	$-2923{,}41$	5856,82
3	1	$-2916{,}33$	5844,66
3	2	$-2915{,}59$	5845,17
3	3	$-2915{,}42$	5846,83

Übung 7: Prognose von ARMA-Prozessen

Aufgabe 1

Es seien X und ε stochastisch unabhängige $\mathrm{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Ferner sei

$$Y = X^2 + \varepsilon.$$

a) Berechnen Sie den Minimum Mean Square Error Predictor $\widehat{Y}^{\text{opt}}$ von Y auf Basis der Beobachtung X. Ermitteln Sie ferner den Mean Square Error of Prediction (MSEP) von $\widehat{Y}^{\text{opt}}$.

b) Zur Prognose von Y werden nun ausschließlich affin-lineare Prädiktoren der Form $\widehat{Y} = a + bX$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ betrachtet. Berechnen Sie den besten affin-linearen Prädiktor $\widehat{Y}^{\text{lin}}$ und seinen MSEP. Kommentieren Sie das Ergebnis kurz.

   Hinweis: Für eine $\mathrm{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}[X^4] = 3$.

Aufgabe 2

Betrachtet wird der MA(3)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \varepsilon_t + 0{,}7\varepsilon_{t-1} - 0{,}3\varepsilon_{t-2} + 0{,}2\varepsilon_{t-3}$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, 50)$. Bestimmen Sie den besten affin-linearen Prädiktor $\widehat{X}^{\text{lin}}_{T+h|T}$ mit dem Prognoseursprung $T = 2$ und dem Prognosehorizont $h = 2$.

Aufgabe 3

Es sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer Prozess mit $\mu = \mathbb{E}[X_t] = 0$ für $t \in \mathbb{Z}$. Ermitteln Sie für die beiden folgenden Fälle den besten affin-linearen Prädiktor $\widehat{X}^{\text{lin}}_t$ für X_t auf Basis der beiden Beobachtungen X_{t-1} und X_{t+1} sowie seinen Mean Square Error of Prediction (MSEP).

a) Bei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ handelt es sich um einen kausalen AR(1)-Prozess mit

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

   und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

b) Bei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ handelt es sich um einen invertierbaren MA(1)-Prozess mit

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

   und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

Aufgabe 4

Betrachtet wird der kausale AR(2)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = 1{,}3X_{t-1} - 0{,}4X_{t-2} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, 2)$. Bestimmen Sie den besten affin-linearen Prädiktor $\widehat{X}^{\text{lin}}_{T+h|T}$ mit Prognoseursprung $T > 2$ für die Prognosehorizonte $h = 1, 2, 3$.

Aufgabe 5

Für eine schwach stationäre Zeitreihe $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit $\mathbb{E}[X_t] = 0$ soll zum Zeitpunkt T die Zufallsvariable X_{T+h} für $h \in \mathbb{N}$ prognostiziert werden.

a) Als Prädiktor für X_{T+h} soll aX_T für ein geeignetes $a \in \mathbb{R}$ verwendet werden. Zeigen Sie, dass der Mean Square Error of Prediction (MSEP)

$$\mathrm{MSEP}(a) = \mathbb{E}\left[(X_{T+h} - aX_T)^2\right]$$

   für $a = \rho(h)$ minimiert wird.

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\min_{a\in\mathbb{R}} \mathrm{MSEP}(a) = \gamma(0)\left(1 - \rho^2(h)\right).$$

Aufgabe 6

Es sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein invertierbarer MA(1)-Prozess mit

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2)$.

a) Bestimmen Sie den Ein-Schritt-Prädiktor (Minimum Mean Square Error Predictor) $\widetilde{X}^{\text{opt}}_{T+1|T}$ bei Vorliegen der unendlichen Vergangenheit. Berechnen Sie ferner den MSEP von $\widetilde{X}^{\text{opt}}_{T+1|T}$.

b) Zeigen Sie, dass für den MSEP des trunkierten Ein-Schritt-Prädiktors $\widetilde{X}^{\text{opt}*}_{T+1|T}$ gilt:

$$\mathbb{E}\left[\left(X_{T+1} - \widetilde{X}^{\text{opt}*}_{T+1|T}\right)^2\right] = \sigma^2(1 + \theta^{2+2T})$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus Aufgabenteil a).

Übung 8: ARCH- und GARCH-Prozesse

Aufgabe 1

Es sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer ARCH(p)-Prozess mit $\mathbb{E}[\sigma_t^4] = c < \infty$ und $\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] = d < \infty$. Zeigen Sie, dass es sich dann bei $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\eta_t := X_t^2 - \sigma_t^2$$

um ein weißes Rauschen handelt.

Aufgabe 2

Betrachtet wird ein schwach stationärer ARCH(1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sigma_t\varepsilon_t \quad \text{und} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2.$$

a) Zeigen Sie, dass die quadrierten Zufallsvariablen X_t^2 für alle $t \in \mathbb{Z}$ die Darstellung

$$X_t^2 = \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j \varepsilon_t^2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_{t-j}^2 \tag{2}$$

besitzen und interpretieren Sie diese Darstellung.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von (2) das zweite Moment $\mathbb{E}[X_t^2]$.

Aufgabe 3

Betrachtet wird ein schwach stationärer GARCH(1,1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sigma_t\varepsilon_t \quad \text{und} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$$

und $\mathbb{E}[X_t^4] < \infty$ für $t \in \mathbb{Z}$.

a) Stellen Sie den quadrierten Prozess $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ als ARMA(1,1)-Prozess dar.

b) Erläutern Sie, ob dieser GARCH-Prozess eine ARCH(∞)-Darstellung besitzt, und ermitteln Sie diese Darstellung gegebenenfalls.

c) Es gelte nun zusätzlich $\varepsilon_t \sim \text{IIN}(0,1)$. Weisen Sie nach, dass die Kurtosis $K(X_t)$ genau dann existiert, wenn $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$ gilt. Zeigen Sie ferner, dass diese dann gegeben ist durch

$$K(X_t) = 3 + \frac{6\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2} > 3.$$

Hinweis: Für $Y \sim \text{N}(0,1)$ gilt $\mathbb{E}[Y^4] = 3$.

d) Bestimmen Sie die bedingte Volatilität $\mathbb{E}[\sigma_{t+h}^2|\mathcal{F}_t]$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ und $h \in \mathbb{N}$ und weisen Sie nach, dass sie für $h \to \infty$ mit der unbedingten Volatilität $\mathbb{E}[\sigma_{t+h}^2]$ übereinstimmt.

Aufgabe 4

Betrachtet wird ein schwach stationärer GARCH(3,2)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sigma_t\varepsilon_t \quad \text{und} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{3}\alpha_j X_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{2}\beta_j\sigma_{t-j}^2$$

sowie

$$\varepsilon_t \sim \text{IID}(0,1) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[X_t^4] < \infty \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ermitteln Sie die ARMA(3,2)-Darstellung des quadrierten Prozesses $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 5

Betrachtet wird ein IGARCH(1,1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sigma_t\varepsilon_t \quad \text{und} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2$$

sowie

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0,1) \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[\sigma_{t+h}^2|\mathcal{F}_{t-1}] = h\alpha_0 + \sigma_t^2 \qquad \text{für } h \in \mathbb{N}_0$$

gilt, und interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Aufgabe 6

Betrachtet wird ein schwach stationärer ARCH(1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$X_t = \sigma_t\varepsilon_t \quad \text{und} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2$$

sowie $\alpha_0 \geq 0$ und $0 < \alpha_1 < 1$. Ferner sei das weiße Rauschen $\varepsilon_t \sim \mathrm{IID}(0,1)$ stetig gleichverteilt auf dem Intervall $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

a) Es gelte zusätzlich $\mathbb{E}[X_t^4] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Schiefe und die Kurtosis der Zufallsvariablen X_t.

   Hinweis: Für eine auf dem Intervall $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ stetig gleichverteilte Zufallsvariable Y gilt $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] = 1$ und $\mathbb{E}[Y^4] = \frac{9}{5}$.

b) Geben Sie an, für welche Werte von α_1 die Kurtosis der Zufallsvariablen X_t existiert.

c) Bestimmen Sie für welche Werte von α_1 der ARCH(1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sogar stark stationär ist. Interpretieren Sie ferner das Ergebnis.

   Hinweis: Es gilt $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x$ und $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$.

Aufgabe 7

Weisen Sie mittels vollständiger Induktion nach, dass sich bei einem schwach stationären GARCH(1,1)-Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ die rekursive Prognoseformel

$$\widehat{\sigma}_{T+1}^2 = \widehat{\alpha}_0 + \widehat{\alpha}_1 X_T^2 + \widehat{\beta}_1\widehat{\sigma}_T^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \widehat{\sigma}_{T+h}^2 = \widehat{\alpha}_0 + (\widehat{\alpha}_1 + \widehat{\beta}_1)\widehat{\sigma}_{T+h-1}^2 \quad \text{für } h > 1$$

in der expliziten Form

$$\widehat{\sigma}_{T+h}^2 = \widehat{\sigma}^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}(\widehat{\sigma}_{T+1}^2 - \widehat{\sigma}^2) \qquad \text{mit} \qquad \widehat{\sigma}^2 := \frac{\widehat{\alpha}_0}{1 - \widehat{\alpha}_1 - \widehat{\beta}_1} \quad \text{für } h \geq 1$$

darstellen lässt.

Übung 9: Multivariate Zeitreihenanalyse

Aufgabe 1

Es sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein kausaler AR(1)-Prozess mit

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

und $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. Bestimmen Sie die Kreuzkovarianzfunktion $\gamma_{X\varepsilon}(h)$ und die Kreuzkorrelationsfunktion $\rho_{X\varepsilon}(h)$ des schwach stationären bivariaten Prozesses $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} X_t \\ \varepsilon_t \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie ferner die Kreuzkorrelation $\rho_{X\varepsilon}(0)$.

Hinweis: Verwenden Sie $\gamma_X(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$ und die MA(∞)-Darstellung $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$ des AR(1)-Prozesses $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 2

Es sei $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein schwach stationärer bivariater Prozess mit

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$$

sowie $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. Ferner seien $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ und $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ unkorreliert. Ermitteln Sie die Kovarianzfunktion $\mathbf{\Gamma}(h)$ des bivariaten Prozesses $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 3

Es sei $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ein multivariater stochastischer Prozess mit

$$\mathbf{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}^j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$$

und $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathrm{WN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$. Ferner sei angenommen, dass die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der $n \times n$-Matrix $\mathbf{\Phi}$ betragsmäßig kleiner als 1 sind.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ um einen wohldefinierten multivariaten linearen Prozess handelt. Unterstellen Sie hierbei, dass die Matrix $\mathbf{\Phi}$ diagonalisierbar ist. D.h. dass es eine invertierbare Matrix $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, so dass $\mathbf{\Phi} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}$ gilt, wobei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\mathbf{\Phi}$ auf der Hauptdiagonalen ist.

   Hinweis: Die Aussage ist auch allgemein gültig, d.h. wenn $\mathbf{\Phi}$ nicht diagonalisierbar ist. Im allgemeinen Fall muss jedoch die Jordansche Normalform einer quadratischen Matrix verwendet werden, was den Nachweis der Aussage aufwendiger gestaltet.

b) Weisen Sie nach, dass der Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine schwach stationäre Lösung der linearen Differenzengleichung

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{\Phi}\mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad \text{für } t \in \mathbb{Z}$$

   ist.

c) Geben Sie die Mittelwertfunktion $\boldsymbol{\mu}_t$ und die Kovarianzfunktion $\mathbf{\Gamma}(h)$ von $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ an. Erläutern Sie, wie mit Hilfe dieses Ergebnisses bei bekannter Varianz-Kovarianzmatrix $\mathbf{\Gamma}(0)$ und bekannter Matrix $\mathbf{\Phi}$ die Kovarianzfunktion $\mathbf{\Gamma}(h)$ für $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ berechnet werden kann. Bestimmen Sie ferner eine Bestimmungsgleichung für die Varianz-Kovarianzmatrix $\mathbf{\Gamma}(0)$ für den Fall, dass die Matrizen $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Sigma}$ bekannt sind.

Aufgabe 4

Betrachtet wird ein kausaler bivariater VAR(2)-Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{\Phi}_1\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{\Phi}_2\mathbf{X}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{3}$$

und $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathrm{WN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$.

a) Ermitteln Sie die ersten vier Matrizen $\mathbf{\Psi}_0, \mathbf{\Psi}_1, \mathbf{\Psi}_2$ und $\mathbf{\Psi}_3$ der VMA(∞)-Darstellung von $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

b) Bestimmen Sie für $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ die Yule-Walker-Gleichungen (vgl. hierzu Abschnitt 3.4).

c) Für die beiden Matrizen $\mathbf{\Phi}_1$ und $\mathbf{\Phi}_2$ in (3) gelte nun

$$\mathbf{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 \\ 0{,}1 & -0{,}5 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}3 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

und die Varianz-Kovarianzmatrix des (multivariaten) weißen Rauschens $(\boldsymbol{\varepsilon}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 2{,}0 \end{pmatrix}.$$

überprüfen Sie, ob der bivariate VAR(2)-Prozess bei Wahl dieser Matrizen weiterhin kausal ist bzgl. $(\boldsymbol{\varepsilon}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. Falls ja, berechnen Sie die ersten vier Matrizen $\mathbf{\Psi}_0, \mathbf{\Psi}_1, \mathbf{\Psi}_2$ und $\mathbf{\Psi}_3$ der VMA(∞)-Darstellung von $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

d) Ermitteln Sie die besten affin-linearen Prädiktoren $\widehat{\mathbf{X}}^{\mathrm{lin}}_{T+1|T}$ und $\widehat{\mathbf{X}}^{\mathrm{lin}}_{T+2|T}$.

Aufgabe 5

Betrachtet wird der bivariate VARMA(1,1)-Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{\Phi}\mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{\Theta}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \tag{4}$$

und $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathrm{WN}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$. Für die Matrizen $\mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{\Theta}$ gelte ferner

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{\Theta} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{E} - \mathbf{\Phi}\mathrm{L})^{-1} = (\mathbf{E} + \mathbf{\Phi}\mathrm{L})$ gilt.

b) Weisen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabenteil a) nach, dass der VARMA(1,1)-Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine Darstellung als VMA(1)-Prozess besitzt. Interpretieren Sie das Ergebnis kurz.

c) Untersuchen Sie, ob der VARMA(1,1)-Prozess $(\mathbf{X}_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ kausal und invertierbar ist.