Folgen und Reihen

1. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{5n^4 + 2n^2}{2n^3 + 3} - \frac{10n + 1}{4}.$$

2. Untersuchen Sie folgende Folgen auf Monotonie, Beschränktheit, Häufungspunkte und Konvergenz, geben Sie Maximum und Minimum bzw. Supremum und Infimum an und fertigen Sie eine Skizze der jeweiligen Folge an:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{1}{3} + \frac{1}{2n}$$

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := (-1)^n \cdot \frac{5n^2}{n^2 + 7n + 8}$$

c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n := (-1)^{n+1} \cdot \frac{6n^2 + 13n}{5n^3 + 7}$$

d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$d_n := (-1)^n \cdot \frac{3n^2 + 5}{2n^2}.$$

3. Geben Sie den Wert der Reihe

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{50} + \frac{3}{500} + \cdots$$

als Bruch mit ganzzahligem Zähler und ganzzahligem Nenner an.

4. Ein Unternehmen produziert 300 Einheiten eines Gutes im ersten Jahr und steigert die Produktion in jedem der folgenden Jahre um 60 Einheiten.

a) Wie viele Einheiten werden im zehnten Jahr produziert?

b) Wie groß ist die Gesamtsumme der Produktion nach zehn Jahren?

5. Der jährliche Zinssatz, mit dem ein Anfangskapital K_0 bei jährlicher Zinszahlung verzinst wird, beträgt 10%, so dass man mit Zinseszinsen nach t Jahren das Kapital K_t erhält. Bei welchem jährlichen Zinssatz (in Prozent) würde man bei stetiger Verzinsung beim selben Anfangskapital K_0 nach t Jahren dasselbe Endkapital K_t erhalten?

6. Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen absolut konvergent sind:

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (1)

7. Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \leq 3 \\ 2x - 2 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit sowie auf rechts- und linksseitige Stetigkeit.

8. Gegeben sei die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) := \begin{cases} 2x - 6 & \text{für} \quad x \leq 2 \\ a^2 - ax^2 + 2 & \text{für} \quad x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(x)$ stetig ist.

9. Gegeben sei die Funktion einer reellen Variablen x mit $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Berechnen und vereinfachen Sie:

$$\varphi(\Delta x) := \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$.

c) Welche Bezeichnung ist für $\varphi(\Delta x)$ üblich? Wie heißt der unter b) berechnete Grenzwert und welche Bedeutung hat dieser für die Funktion f?

10. Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) := \begin{cases} ax^2 + b & \text{für} \quad x \geq 1 \\ x & \text{für} \quad x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

stetig und differenzierbar?

Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ (2)

11. Geben Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen an:

a) $h(z) = \sqrt{4\sin\left(\frac{z}{2}\right) + 2}$

b) $y(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(2x+1)$

c) $y(t) = \frac{e^{3t}-3}{e^{-3t}-3}$

12. Zu bestimmen sei eine ganzrationale Funktion dritten Grades $f(x)$. Der Graph dieser Funktion verläuft durch die Punkte $P(-2, 12)$ und $Q(2, -7)$. Des Weiteren sei bekannt, dass sich die Graphen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion an der Stelle $x = 3$ berühren.

13. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern diese existieren:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x - 1}{\frac{1}{3}x^3 - x \cdot \ln 3}$

b) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\ln(x-4)}{x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^2}{x^2}$

14. Bei der Nachfrage nach einem bestimmten Gut sei der Zusammenhang zwischen dem Preis p und der nachgefragten Menge x des Gutes durch die Funktion

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ , \\ x &\mapsto p(x) := 10e^{(-2x+4)\cdot x} \end{aligned}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_p(x)$ für den Fall, dass die Menge $x_0 = \frac{1}{4}$ ist und fertigen Sie eine Skizze der Elastizitätsfunktion an.

b) Bestimmen Sie die Menge, bei der die Elastizität $\varepsilon_p(x)$

b$_1$) gleich 1 bzw.

b$_2$) gleich -1 ist.

c) Geben Sie die Mengenbereiche an, bei denen die Nachfrage

c$_1$) elastisch bzw.

c$_2$) unelastisch ist.

Approximation, Optimierung und Kurvendiskussion in $\mathbb{R}$

15. Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) := \ln(2x-2) \end{aligned}$$

mit $D := \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$.

a) Berechnen Sie $f(4)$.

b) Geben Sie das Taylor-Polynom 3. Grades mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.

c) Berechnen Sie $f(4)$ approximativ mit Hilfe des in Teilaufgabe b) berechneten Taylor-Polynoms.

d) Bestimmen Sie für den in Teilaufgabe c) genannten Fall das Restglied des Taylor-Polynoms.

16. Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren die reellen Lösungen der Gleichung (auf vier Nachkommastellen gerundet)

$$x^5 - x - \frac{1}{5} = 0.$$

17. Für die Absatzmenge $X(t)$ in ME eines Produktes wird folgende Entwicklung für $t \geq 0$ prognostiziert:

$$X(t) := -6e^{-0{,}05t^2} + 10$$

a) Das punktuelle Änderungsverhalten $X'(t)$ nimmt zunächst ständig zu, um ab einem bestimmten Zeitpunkt t_0 wieder zurück zu gehen. Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_0 dieser Trendwende.

b) Untersuchen Sie, ob $X(t)$ für sehr große Werte von t einem Sättigungswert zustrebt und wenn ja, bestimmen Sie diesen.

18. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}.$$

Bestimmen Sie die

a) Nullstellen,

b) lokalen Extrema (und klassifizieren Sie diese),

c) Grenzwerte für $x \to \pm\infty$, sofern diese existieren und

d) Monotoniebereiche (und klassifizieren Sie diese).

Integralrechnung in $\mathbb{R}$ (1)

19. Berechnen Sie die folgenden bestimmten und uneigentlichen Riemann-Integrale:

a) $\int\limits_0^1 x^4 \, dx$

b) $\int\limits_{-3}^1 |x+2| \, dx$

c) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} \, dx$

d) $\int\limits_{-1}^1 |x| \cdot x^2 \, dx$

20. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^3 - x$.

a) Berechnen Sie das Riemann-Integral

$$\int_{-5}^{5} f(x) \, dx \, .$$

b) Wie groß ist die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse, die seitlich durch die Geraden $x = -5$ und $x = 5$ begrenzt wird?

Integralrechnung in $\mathbb{R}$ (2)

21. Berechnen Sie die folgenden RIEMANN-Integrale:

a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \cos\left(x^2\right) \; dx$

b) $\int 2x \cdot e^{-2x^2+t} \; dx$

c) $\int x \cdot \sin\left(x^2\right) \; dx$

22. Berechnen Sie die folgenden RIEMANN-Integrale:

a) $\int_0^1 2x^3 \cdot e^{x^2} \; dx$

b) $\int x^a \cdot \ln(x) \; dx \quad$ für $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|x|)^2} \; dx$

23. Gegeben sei die Grenzkostenfunktion $K'(x) := \frac{4x}{\sqrt[3]{30+4x^2}}$.

a) Bestimmen Sie alle zugehörigen Kostenfunktionen.

b) Für welche Kostenfunktion gilt $K(5) = 30$? Wie groß sind in diesem Fall die Fixkosten?

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

24. Ermitteln Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix für folgende Funktionen:

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) := x^2 \cdot \sin(y^2)$

b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ (x, y) \mapsto g(x, y) := e^{2xy^2}$

25. Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R}\,, \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) := 3x^2 \ln(y) + 4x^3 z^2 - y^2 z^3 \end{aligned}$$

mit $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y > 0\}$. Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f. Bestimmen Sie zudem die Tangentialhyperebene von f an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.

26. Berechnen Sie das totale Differential der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ (x_1, x_2) &\mapsto f(x_1, x_2) := 5x_1^2 x_2 - 4x_2^3\,. \end{aligned}$$

27. Gegeben sei die Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$y(p_1, p_2) := 8p_1^{0,25} p_2^{0,75}\,.$$

a) Berechnen Sie $y(100, 200)$.

b) Bestimmen Sie grad $y(p_1, p_2)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des totalen Differentials approximativ die Änderung von $y(100, 200)$, wenn p_1 um eine Einheit vergrößert und p_2 um zwei Einheiten verkleinert wird.

d) Vergleichen Sie das Ergebnis in c) mit dem exakten Änderungswert.

Optimierung im $\mathbb{R}^n$

28. Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x,y) := -\frac{1}{4}x^4 + x - y^3 + 3y^2 + 9y + 50$$

a) Bestimmen Sie die stationären Stellen der Funktion f.

b) Überprüfen Sie, ob es sich bei den stationären Stellen um Extremwerte handelt.

29. Die Nachfragefunktionen $x_1(p_1)$ und $x_2(p_2)$ zweier Güter in Abhängigkeit der Preise p_1 und p_2 lauten:

$$\begin{aligned} x_1(p_1) &:= 60 - p_1 \quad \text{mit} \quad p_1 \in [0,60] \\ x_2(p_2) &:= 20 - p_2 \quad \text{mit} \quad p_2 \in [0,20] \end{aligned}$$

Die Herstellungskosten seien gegeben durch:

$$K(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$$

Bei welchen Preisen wird der Gewinn maximal? Berechnen sie diesen Gewinn.

30. Betrachtet wird die reellwertige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) = 2xy$$

unter der Nebenbedingung

$$2x + 4y = 80.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $2x + 4y = 80$. Begründen Sie, ob es sich bei diesen Kandidaten bereits um alle möglichen Kandidaten für die Extremalstellen von f unter der angegebenen Nebenbedingung handelt.

b) Erläutern Sie mit Hilfe der geränderten Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion L, ob die in Aufgabenteil a) ermittelten Kandidaten tatsächlich Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $2x+4y = 80$ sind.

c) Erläutern Sie, ob es sich bei den in Aufgabenteil b) ermittelten Extremalstellen von f um globale Extremalstellen handelt.

31. Gegeben sei die konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) := x_1^2 + 3x_2^2\,.$$

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von f unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$g(x_1, x_2) := 4x_1 + 12x_2 = -80\,.$$

32. Die Nutzenfunktion eines Haushaltes sei gegeben über:

$$\begin{aligned} U : [0,12] \times [0,20] &\longrightarrow \mathbb{R}_+\,, \\ (x,y) &\mapsto U(x,y) := -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{213}{2} - \frac{1}{4}y^2 + 2y \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen x und y die gekauften Mengen zweier Güter. Nehmen Sie an, dass der Haushalt über ein Einkommen von $M = 100$ verfügt und dass die Preise beider Güter jeweils $p = 4$ betragen. Ermitteln Sie das Güterbündel, das den Nutzen des Haushaltes unter vollständiger Ausschöpfung seines Einkommens maximiert.

Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

33. Berechnen Sie die folgenden Doppel- und Dreifach-Integrale:

a) $\int_3^4 \int_0^2 (2x + 3y) \; d(x, y)$

b) $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x_1 \cdot e^{x_2} \; d(x_1, x_2)$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos x_1 \cdot e^{x_2} \; d(x_2, x_1)$

d) $\int_0^2 \int_2^3 \int_1^2 \frac{2z}{(x+y)^2} \; d(x, y, z)$