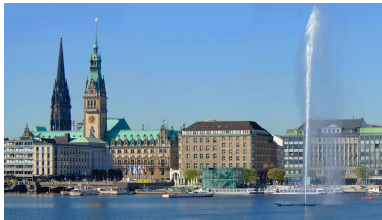


Quantitatives Risikomanagement 2

SS 2026

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg

Lehrstuhl für BWL, insb. Mathematik und Statistik in den Wirtschaftswissenschaften



Kapitel 10

Monte-Carlo-Simulation

Abschnitt 10.1

Einleitung

10. Monte-Carlo-Simulation

10.1 Einleitung

Im quantitativen Risikomanagement wird man häufig mit **komplexen stochastischen Modellen** konfrontiert, die selbst bei stark vereinfachenden Annahmen keine analytische Herleitung der Verteilungen der interessierenden Größen (Gesamtschadenhöhe, Zielkapital usw.) erlauben. Zum Beispiel müssen in **Solvenztests** (z.B. Solvency II, Swiss Solvency Test (SST)), in der **Dynamischen Finanzanalyse (DFA)** und im **Asset-Liability-Management (ALM)** eine Reihe von (ganz oder teilweise) zufallsabhängigen „Größen“ in den verschiedenen Branchen und Organisationseinheiten, wie z.B.

- Prämieinnahmen,
- Schadenanzahlen,
- Schadenhöhen und
- Kapitalerträge

sowie ihre **dynamischen Interaktionen** und **Abhängigkeiten** berücksichtigt werden. Darüberhinaus muss dabei auch den vorhandenen **Rückversicherungs-, Anlage- und Underwriting-Strategien** sowie verschiedenen **Extremszenarien** Rechnung getragen werden.



10. Monte-Carlo-Simulation

10.1 Einleitung

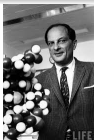
Bei solchen komplexen Fragestellungen ist man dann oft auf die Verwendung von **Monte-Carlo-Simulationen** angewiesen. Unter dieser Bezeichnung werden Algorithmen verstanden, bei denen mittels eines Computers zuerst sehr viele unabhängige **Pseudozufallszahlen** erzeugt werden, die einer vorgegebenen Verteilung folgen, und dann in einem zweiten Schritt damit sehr viele unabhängige und gleichwahrscheinliche Realisierungen eines komplexen stochastischen oder deterministischen Modells (z.B. Gesamtschaden- oder Solvenzmodell) simuliert werden. Die Ergebnisse dieser Simulationen können anschließend auf Grundlage des **Satzes von Glivenko-Cantelli** in Form der **empirischen Verteilungsfunktion** (insbesondere Quantile und Risikomaße) oder auf Grundlage des **Gesetz der großen Zahlen** in Form von **Momenten** (insbesondere Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Varianzen) ausgewertet werden (siehe Abschnitt 10.7).

Die **ersten Ideen zur Monte-Carlo-Simulation** wurden von dem berühmten Physik-Nobelpreisträger ENRICO FERMI (1901–1954) in den 30er Jahren des letzten Jahrhunderts entwickelt als er die Neutronendiffusion untersuchte. Diese Arbeit wurde jedoch nicht veröffentlicht.



10. Monte-Carlo-Simulation

10.1 Einleitung



Einige Jahre später, in den späten 40er Jahren des letzten Jahrhunderts, haben der polnisch-amerikanische Mathematiker STANISLAW M. ULAM (1909–1984), der ungarisch-amerikanische Mathematiker JOHN VON NEUMANN (1903–1957) und der griechisch-amerikanische Physiker NICHOLAS C. METROPOLIS (1915–1999) die Monte-Carlo-Simulation während ihrer Arbeit für das geheime Manhattan-Projekts der US-Regierung am Los Alamos Scientific Laboratory weiterentwickelt.



Die **erste wissenschaftliche Arbeit zur Monte-Carlo-Methode** wurde 1949 von METROPOLIS und ULAM unter dem Titel

„The Monte Carlo Method“



veröffentlicht. Die plakative Bezeichnung „**Monte-Carlo-Methode**“ wurde von METROPOLIS vorgeschlagen und diente innerhalb des geheimen Manhattan-Projekts als Codename. Diese Bezeichnung soll an das Casino in Monte Carlo erinnern, in der ULAMS Onkel häufiger dem Roulette frönte, und an die Tatsache, dass das Roulette eine der einfachsten mechanischen Geräte ist, um Zufallszahlen zu generieren.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.1 Einleitung

Das folgende Beispiel zeigt, wie eine **deterministische Fragestellung** zu einer stochastischen Problemstellung umformuliert und dann mittels Monte-Carlo-Simulation gelöst werden kann:

Beispiel (Monte-Carlo-Simulation zur Berechnung von π)

Mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation soll eine Approximation für die irrationale Zahl π ermittelt werden. Hierzu werden zwei stochastisch unabhängig auf dem Intervall $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen X und Y sowie ein Kreis $\mathcal{K}$ mit Radius $r = 1$ und Mittelpunkt $(0,0)$ betrachtet. Dann gilt

$$\begin{aligned}\underbrace{\mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{K})}_{=\mathbb{E}[1_{\mathcal{K}}(X, Y)]} &= \frac{\text{Fläche des Kreises}}{\text{Fläche des Quadrats } [-1, 1]^2} \\ &= \frac{\pi \cdot 1^2}{2 \cdot 2} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(siehe nächste Abbildung) und somit

$$\pi = 4 \cdot \mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{K}). \quad (1)$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.1 Einleitung

Beispiel (Fortsetzung)

D.h. die Zahl π lässt sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit

$$p := \mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{K}) \quad (2)$$

ausdrücken. Dabei ist zu beachten, dass sich diese Wahrscheinlichkeit p ohne Kenntnis von π zwar nicht exakt berechnen lässt, aber sie aufgrund des starken Gesetzes der großen Zahlen mit Hilfe vieler unabhängiger Realisierungen (x_k, y_k) des bivariaten Zufallsvektors

$$(X, Y) \sim U[-1, 1]^2$$

wie folgt beliebig genau geschätzt werden kann: Die Zufallsvariablen

$$U_k := 1_{\mathcal{K}}(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x_k, y_k) \in \mathcal{K} \\ 0 & \text{für } (x_k, y_k) \notin \mathcal{K} \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{N}$ sind dann stochastisch unabhängig und die Realisierung u_k von U_k gibt an, ob die k -te Realisierung von (X, Y) in $\mathcal{K}$ liegt ($u_k = 1$) oder nicht ($u_k = 0$).

10. Monte-Carlo-Simulation

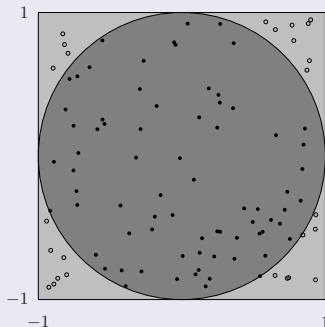
10.1 Einleitung

Beispiel (Fortsetzung)

Ferner gilt $\mathbb{P}(U_k = 1) = p$ (vgl. (2)) und somit

$$U_k \sim \text{Bin}(1, p) \quad \text{und} \quad Z_n := \sum_{k=1}^n U_k \sim \text{Bin}(n, p).$$

(vgl. Abschnitt 4.2).



10. Monte-Carlo-Simulation

10.1 Einleitung

Beispiel (Fortsetzung)

Der beste lineare erwartungstreue Schätzer und ML-Schätzer für $p = \mathbb{E}[U_k]$ ist durch das arithmetische Mittel

$$\hat{p}_n := \frac{1}{n} Z_n$$

gegeben. Mit (1) und $\hat{p}_n$ erhält man als Schätzer für π

$$\hat{\pi}_n = 4\hat{p}_n = \frac{4}{n} Z_n. \quad (3)$$

Wird z.B. beobachtet, dass von 100 Realisierungen (x_k, y_k) insgesamt 80 innerhalb von $\mathcal{K}$ liegen, dann liefert (3) für π die Approximation

$$\hat{\pi}_n = 4\hat{p}_n = 4 \cdot \frac{80}{100} = 3,2.$$

Diese Approximation ist zwar relativ grob, aber das starke Gesetz der großen Zahlen stellt sicher, dass die Schätzung $\hat{\pi}_n$ für $n \rightarrow \infty$ fast sicher gegen π konvergiert.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.1 Einleitung

Beispiel (Fortsetzung)

D.h. es gilt

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\pi}_n = \pi\right) = 1$$

(siehe Abschnitt 10.7). Mit der Ungleichung von Chebyshev (vgl. MEINTRUP-SCHÄFFLER (2005), Seite 105)) sowie

$$\mathbb{E}[\hat{p}_n] = \frac{1}{n} \mathbb{E}[Z_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[U_k] = \frac{1}{n} np = p$$

und

$$\text{Var}(\hat{p}_n) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(Z_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(U_k) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

erhält man für alle $\varepsilon > 0$ die Fehlerabschätzung:

$$\mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\hat{p}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.1 Einleitung

Beispiel (Fortsetzung)

Mit $\varepsilon := \delta \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ für $\delta > 0$ folgt daraus:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|\hat{p}_n - p| \leq \delta \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(|\hat{p}_n - p| > \delta \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \\ &\geq 1 - \frac{p(1-p)}{n \left(\delta \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\delta^2}\end{aligned}$$

Aus $p \in [0, 1]$ folgt ferner $\frac{1}{4} \geq p(1-p)$ und damit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|\hat{p}_n - p| \leq \delta \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) &\geq \mathbb{P}\left(|\hat{p}_n - p| \leq \delta \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\hat{p}_n - \delta \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq p \leq \hat{p}_n + \delta \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.\end{aligned}$$

10. Monte-Carlo-Simulation

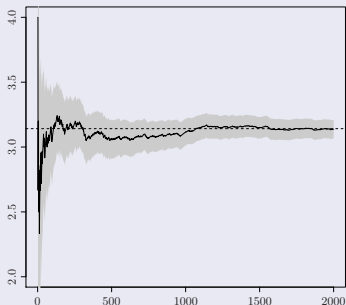
10.1 Einleitung

Beispiel (Fortsetzung)

Dies liefert für $\pi = 4p$ schließlich das Konfidenzintervall

$$\mathbb{P} \left(4\hat{p}_n - \delta \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \pi \leq 4\hat{p}_n + \delta \frac{2}{\sqrt{n}} \right) \geq 1 - \frac{1}{\delta^2}.$$

Dieses Konfidenzintervall zieht sich mit der Rate $n^{-1/2}$ zusammen. D.h. für ein halb so großes Konfidenzintervall wird der vierfache Simulationsumfang benötigt (siehe Abbildung).



Abschnitt 10.2

Pseudozufallszahlen für $U(0, 1)$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.2 Pseudozufallszahlen für $U(0, 1)$

Grundlage für Monte-Carlo-Simulationen sind sogenannte **Pseudozufallszahlen auf dem Einheitsintervall $(0, 1)$** , die mittels deterministischer Algorithmen, sog. **Pseudozufallszahlengeneratoren**, in großer Zahl auf Computern erzeugt werden und (näherungsweise) unabhängig und auf dem Einheitsintervall $(0, 1)$ gleichverteilt sind. Da Pseudozufallszahlen mit Hilfe deterministischer Algorithmen generiert werden, sind sie nicht wirklich zufällig, sondern erscheinen nur zufällig verteilt. Diesem wichtigen Sachverhalt wird mit der Bezeichnung „Pseudozufallszahlen“ Rechnung getragen.

Ein guter Pseudozufallszahlengenerator sollte die folgenden **Eigenschaften** besitzen:

- a) Die erzeugten Pseudozufallszahlen sollten durch statistische Tests (z.B. den Kolmogorov-Smirnov- oder χ^2 -Test) nicht von auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallszahlen zu unterscheiden sein.
- b) Die erzeugten Pseudozufallszahlen sollten untereinander keine erkennbaren Abhängigkeiten aufweisen und durch statistische Tests nicht von unabhängigen Zufallszahlen zu unterscheiden sein.
- c) Die Periodenlänge der erzeugten Pseudozufallszahlen sollte groß sein (d.h. es sollte sehr lange dauern, bevor sich die Pseudozufallszahlen wiederholen).
- d) Die Pseudozufallszahlen sollten reproduzierbar sein, damit die Simulationsergebnisse nachvollzogen werden können.
- e) Effiziente Berechenbarkeit mit Hilfe eines Computers.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.2 Pseudozufallszahlen für $U(0, 1)$

Ausgehend von unabhängigen und auf dem Einheitsintervall $(0, 1)$ gleichverteilten Pseudozufallszahlen können mit geeigneten Transformationsverfahren, wie z.B. der **Inversionsmethode** (siehe Abschnitt 10.4) und der **Verwerfungsmethode** (siehe Abschnitt 10.5), unabhängige Pseudozufallszahlen mit anderen Verteilungen erzeugt werden.

Im Folgenden wird anhand des **linearen Kongruenzgenerators** kurz die Funktionsweise eines einfachen Pseudozufallszahlengenerators erläutert. Er wurde 1949 vom dem bekannten US-amerikanischen Mathematiker DERRICK LEHMER (1905–1991) eingeführt.



Im Folgenden bezeichnet

$$x = y \pmod{m} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{N}_0 \text{ und } m \in \mathbb{N}$$

den bei Division von y durch m entstehenden Rest x . D.h. es gibt ein eindeutiges $k \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$y = mk + x \quad \text{mit } x \in \{0, \dots, m-1\}$$

gilt. Mit „mod“ wird die Funktion **Modulo** bezeichnet. Sie berechnet den Rest x bei der Division y/m mit $y \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}$.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.2 Pseudozufallszahlen für $U(0, 1)$

Damit lässt sich nun der **lineare Kongruenzgenerator** wie folgt definieren:

Algorithmus (Linearer Kongruenzgenerator)

1) Wähle:

$m \in \mathbb{N}$ (Modul)

$a \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ (Multiplikator)

$c \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ (Inkrement)

$x_0 \in \{0, \dots, m-1\}$ (Keim (engl. „seed“))

2) Berechne rekursiv

$$x_{i+1} := (ax_i + c) \pmod{m} \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

3) Setze

$$u_i := \frac{x_i}{m} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Im Falle von $c = 0$ spricht man häufig auch genauer von multiplikativen Kongruenzgenerator und für $c > 0$ von gemischtem linearen Kongruenzgenerator.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.2 Pseudozufallszahlen für $U(0, 1)$

Die durch (5) erzeugten Werte $u_1, u_2, \dots$ liegen offensichtlich im Intervall $[0, 1)$ und werden als Folge von (näherungsweise) unabhängigen und auf dem Intervall $[0, 1)$ gleichverteilten Pseudozufallszahlen aufgefasst.

Bemerkungen:

- Bei gegebenen Werten für m, a und c hängt die durch (5) erzeugte Folge von Pseudozufallszahlen nur vom Wert des Keims x_0 ab. D.h. durch Wahl von x_0 ist die resultierende Folge von Pseudozufallszahlen **vollständig festgelegt**.
- In den meisten Programmen wird es dem Nutzer überlassen, ob er einen Keim x_0 angibt. Wird kein Keim angegeben, dann wird eine Zahl „zufällig“ ausgewählt (z.B. der Wert der Nanosekunde, in dem das Programm gestartet wird).
- Resultiert eine Pseudozufallszahl u_k mit $u_k = u_h$ für $k > h \geq 0$, dann beginnen sich die Pseudozufallszahlen zu wiederholen.
- Die Auswahl von m, a, c und x_0 muss sorgfältig getroffen werden damit der linearen Kongruenzgenerator Pseudozufallszahlen von **guter Qualität** liefert (d.h. große Periodenlänge, Gleichverteilung auf $[0, 1)$ und keine Korrelationen zwischen den Pseudozufallszahlen) und gleichzeitig schnell genug rechnet. Für binär arbeitende Rechner wählt man z.B. $m = 2^N$ (z.B. $m = 2^{31}$). Für die Auswahl von a, c und x_0 verwendet man Resultate aus der Zahlentheorie.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.2 Pseudozufallszahlen für $U(0, 1)$

Beispiel (Linearer Kongruenzgenerator)

Bei Verwendung des linearen Kongruenzgenerators mit dem Multiplikator $a = 81$, dem Inkrement $c = 35$, dem Keim $x_0 = 4$ und dem Modul $m = 2^8 = 256$ erhält man mit der Rekursion (4) für die ersten drei Werte

$$x_1 = (81 \cdot 4 + 35) \bmod 256 = 103$$

$$x_2 = (81 \cdot 103 + 35) \bmod 256 = 186$$

$$x_3 = (81 \cdot 186 + 35) \bmod 256 = 253$$

und damit die drei Pseudozufallszahlen:

$$u_1 = \frac{103}{256} = 0,4023438$$

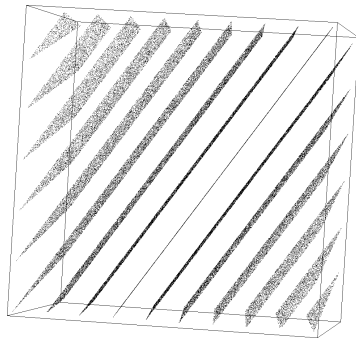
$$u_2 = \frac{186}{256} = 0,7265625$$

$$u_3 = \frac{253}{256} = 0,9882812$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.2 Pseudozufallszahlen für $U(0, 1)$

Eine **große Schwäche** des linearen Kongruenzgenerators ist seine „kristalline“ Natur. Werden jeweils n hintereinander erzeugte Pseudozufallszahlen $u_{kn+1}, \dots, u_{(k+1)n}$ als die Koordinaten eines Punktes $(u_{kn+1}, \dots, u_{(k+1)n})^T$ im n -dimensionalen Einheitswürfel $[0, 1]^n$ aufgefasst, dann liegen diese Punkte auf einer endlichen (oft kleinen) Anzahl von Hyperebenen (vgl. MARSAGLIA (1968)).



10. Monte-Carlo-Simulation

10.2 Pseudozufallszahlen für $U(0, 1)$

Aufgrund dieser großen Schwäche sollte der lineare Kongruenzgenerator nicht im Zusammenhang mit Monte-Carlo-Simulationen verwendet werden. Für leistungsfähigere Pseudozufallszahlengeneratoren siehe z.B. MARSAGLIA-ZAMAN (1991). In den verschiedenen Programmiersprachen und Statistikpaketen, wie z.B. R, sind eine Reihe von leistungsfähigen Pseudozufallszahlengeneratoren implementiert.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass **unabhängige und auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte** Pseudozufallszahlen zur Verfügung stehen. In den Abschnitten 10.4 und 10.5 wird gezeigt, wie ausgehend von solchen Pseudozufallszahlen mit der **Inversions-** und der **Verwerfungsmethode** unabhängige Pseudozufallszahlen für andere Verteilungen generiert werden können.

Abschnitt 10.3

Simulationslemma

10. Monte-Carlo-Simulation

10.3 Simulationslemma

In diesem Abschnitt stehen zwei Resultate im Mittelpunkt, die für die **Simulation von Zufallszahlen von großer Bedeutung** sind. Zum Beweis dieser Resultate werden die **Eigenschaften der verallgemeinerten Inversen (Quantilfunktion)** benötigt:

Satz (Eigenschaft der verallgemeinerten Inversen (Quantilfunktion))

Es sei $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ eine Verteilungsfunktion und

$$F^{-1} : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, q \mapsto F^{-1}(q) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F_X(x) \geq q\}$$

ihre verallgemeinerte Inverse (Quantilfunktion). Dann gilt:

- a) F^{-1} ist monoton wachsend.
- b) $F(F^{-1}(u)) \geq u$ für $u \in (0, 1)$.
- c) $F^{-1}(F(x)) \leq x$ für $x \in \mathbb{R}$.
- d) Ist F stetig, dann ist F^{-1} streng monoton wachsend und es gilt $F(F^{-1}(u)) = u$ für $u \in (0, 1)$.
- e) Ist F streng monoton wachsend, dann gilt $F^{-1}(F(x)) = x$ für $x \in \mathbb{R}$.
- f) Ist F stetig und streng monoton wachsend, dann ist F^{-1} eine gewöhnliche Inverse. D.h. es gilt $F(F^{-1}(u)) = u$ für $u \in (0, 1)$ und $F^{-1}(F(x)) = x$ für $x \in \mathbb{R}$.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.3 Simulationslemma

Beweis: Siehe z.B. BECKER ET AL. (2016), Seiten 4–5. ■

Ist X eine Zufallsvariable und T eine beliebige **monoton wachsende Funktion**, dann gilt

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \subseteq \{\omega \in \Omega : (T \circ X)(\omega) \leq T(x)\}$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T(X) \leq T(x)) &= \mathbb{P}(T(X) \leq T(x), X \leq x) + \mathbb{P}(T(X) \leq T(x), X > x) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(T(X) \leq T(x), X > x) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(T(X) = T(x), X > x)\end{aligned}\tag{6}$$

D.h. für eine Zufallsvariable X und eine **monoton wachsende Funktion** T gilt damit insbesondere stets

$$\boxed{\mathbb{P}(T(X) \leq T(x)) \geq \mathbb{P}(X \leq x).}\tag{7}$$

Für den Spezialfall, dass T eine **Verteilungsfunktion** ist, korrespondiert das Ereignis $\{\omega \in \Omega : (T \circ X)(\omega) = T(x), X(\omega) > x\}$ mit einem flachen Teil der Verteilungsfunktion T und besitzt daher die Wahrscheinlichkeit 0. Aus (6) folgt daher

$$\boxed{\mathbb{P}(T(X) \leq T(x)) = \mathbb{P}(X \leq x).}\tag{8}$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.3 Simulationslemma

Mit diesen Vorüberlegungen kann nun der folgende Satz bewiesen werden, der für die Simulation von Zufallszahlen sehr nützlich ist. Er besteht aus zwei Teilen und wird häufig als **Simulationslemma** bezeichnet.

Der Teil a) dieses Satzes ist im Englischen unter der Bezeichnung **Inverse Probability Integral Transformation Theorem** oder auch **Quantil Function Theorem** bekannt und ist die Grundlage für die in Abschnitt 10.4 betrachtete **Inversionsmethode**.

Der Teil b) ist die Umkehrung dieser Aussage. Dieses Resultat gilt jedoch nur für Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion und ist im Englischen unter der Bezeichnung **Probability Integral Transformation Theorem** bekannt.

Satz (Simulationslemma)

- a) Es sei F eine Verteilungsfunktion und F^{-1} ihre verallgemeinerte Inverse (Quantilfunktion) sowie $U \sim U(0, 1)$. Für $X := F^{-1}(U)$ gilt dann $X \sim F$.
- b) Es sei X eine Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion F_X . Es gilt dann $F_X(X) \sim U(0, 1)$.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.3 Probability Integral Transformation Theorem

Beweis: Zu a): Es sei $x \in \mathbb{R}$. Mit der Aussage a) des letzten Satzes, (7) und Aussage c) des letzten Satzes erhält man:

$$F(x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) \leq \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq F^{-1}(F(x))) = \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(F(x))) \leq \mathbb{P}(X \leq x)$$

Mit (8) und der Aussage b) des letzten Satzes folgt:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)) \leq \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x)$$

Insgesamt gilt also $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ und damit $X \sim F$.

Zu b): Es sei $u \in (0, 1)$. Mit der Aussage d) des letzten Satzes und (8) folgt:

$$F_{F_X(X)}(u) = \mathbb{P}(F_X(X) \leq u) = \mathbb{P}(F_X(X) \leq F_X(F_X^{-1}(u))) = \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(u)) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u$$

D.h. es gilt $F_X(X) \sim U(0, 1)$. ■

Abschnitt 10.4

Inversionsmethode

10. Monte-Carlo-Simulation

10.4 Inversionsmethode

Die **Inversionsmethode** ist eine sehr einfache Methode zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen mit einer vorgegebenen Verteilungsfunktion F . Sie basiert unmittelbar auf Teil a) des Simulationslemmas (Inverse Probability Integral Transformation Theorem).

Gemäß dieses Resultats können mit dem folgenden einfachen Algorithmus für eine Verteilungsfunktion F mit der verallgemeinerten Inversen (Quantilfunktion) F^{-1} wie folgt Pseudozufallszahlen erzeugt werden:

Algorithmus (Inversionsmethode)

- 1) Erzeuge $U \sim U(0, 1)$.
- 2) Setze $X := F^{-1}(U)$.

Im folgenden Beispiel wird gezeigt, wie für **Exponential-** und **Gammaverteilungen** mit der Inversionsmethode Pseudozufallszahlen erzeugt werden können.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.4 Inversionsmethode

Beispiel (Inversionsmethode für $\text{Exp}(\lambda)$ - und $\Gamma(n, \lambda)$ -Verteilung)

Die Verteilungsfunktion einer $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung ist gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 4.7). Auflösen der Gleichung

$$u = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{für } x > 0$$

nach x liefert die Quantilfunktion

$$x = F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u) \quad \text{für } u \in (0, 1). \quad (9)$$

Für $U \sim U(0, 1)$ gilt ferner $1 - U \stackrel{(d)}{=} U$. Die Zufallsvariable

$$X := F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \ln(U) \quad (10)$$

besitzt daher eine $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.4 Inversionsmethode

Beispiel (Fortsetzung)

Eine $\Gamma(n, \lambda)$ -verteilte Zufallsvariable X kann als Summe

$$X = \sum_{k=1}^n X_k$$

von n stochastisch unabhängigen $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ dargestellt werden (vgl. Abschnitt 4.7). Für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $U_1, \dots, U_n \sim U(0, 1)$ folgt daher mit (10):

$$X = \sum_{k=1}^n X_k = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda} \ln(U_k) \sim \Gamma(n, \lambda)$$

Mit der Inversionsmethode können auch für **diskrete Verteilungen** Pseudozufallszahlen erzeugt werden. Ist F eine diskrete Verteilungsfunktion, welche an (maximal abzählbar unendlich vielen) Stellen $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ Sprünge der Höhe $p_0, p_1, p_2, \dots$ aufweist und ansonsten konstant verläuft, dann ist F **nicht injektiv** und die Quantilfunktion F^{-1} kann daher nicht wie im letzten Beispiel einfach durch Auflösen der Gleichung $F(x) = u$ nach x bestimmt werden. Stattdessen muss untersucht werden, für welchen x -Wert zu einem gegebenen $u \in (0, 1)$ erstmals $F(x) \geq u$ gilt.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.4 Inversionsmethode

Mit $U \sim U(0, 1)$ erhält man dann, dass

$$X := F^{-1}(U) := \begin{cases} x_0 & \text{für } U < p_0 \\ x_1 & \text{für } p_0 \leq U < p_0 + p_1 \\ x_2 & \text{für } p_0 + p_1 \leq U < p_0 + p_1 + p_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_k & \text{für } \sum_{i=0}^{k-1} p_i \leq U < \sum_{i=0}^k p_i \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

eine diskrete Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion F ist. Denn für diese Zufallsvariable gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = x_k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{k-1} p_i \leq U < \sum_{i=0}^k p_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^k p_i - \sum_{i=0}^{k-1} p_i = p_k \end{aligned}$$

D.h. es gilt tatsächlich $X \sim F$.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.4 Inversionsmethode

Mit der Inversionsmethode können auch für **gemischte Verteilungsfunktionen** Pseudozufallszahlen erzeugt werden. Unter einer gemischten Verteilungsfunktion versteht man eine Verteilungsfunktion, die bis auf maximal abzählbar unendlich viele Stellen $x_0, x_1, x_2, \dots$ stetig und differenzierbar ist und an den Stellen $x_0, x_1, x_2, \dots$ wie eine diskrete Verteilungsfunktion Punktmassen größer als Null aufweist. Siehe hierzu das folgende Beispiel:

Beispiel (Inversionsmethode bei einer gemischten Verteilungsfunktion)

Die Zufallsvariable $X \sim \text{Weibull}(0,5;5)$ beschreibe die Schadenhöhe bei einer Sachversicherung. D.h. X besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/5)^{0,5}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 4.11). Ferner wird angenommen, dass der durch den Versicherer gedeckte Höchstschaden $u = 8$ betrage und ein Selbstbehalt von $d = 1$ existiert. Der Versicherer ist folglich am Erwartungswert und der Varianz der folgenden Zufallsvariablen interessiert:

Beispiel (Fortsetzung)

$$Y := \begin{cases} 0 & \text{für } X \leq 1 \\ X - 1 & \text{für } 1 < X < 8 \\ 7 & \text{für } X \geq 8 \end{cases}$$

interessiert. Die Zufallsvariable Y verhält sich bis auf die beiden Stellen $y = 0$ und $y = 7$ wie eine absolutstetige Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion. An den beiden Stellen $y = 0$ und $y = 7$ hat sie jedoch die folgenden Punktmassen:

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) = 1 - e^{-(1/5)^{0.5}} \approx 0,3606$$

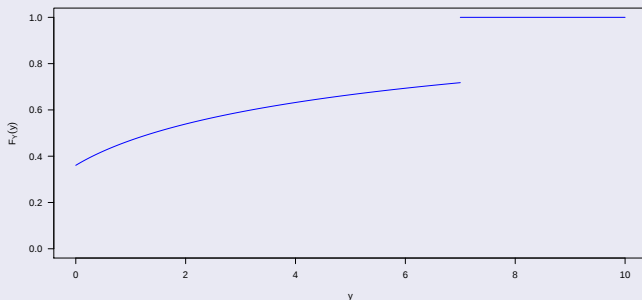
$$\mathbb{P}(Y = 7) = \mathbb{P}(X \geq 8) = 1 - F_X(8) = e^{-(8/5)^{0.5}} \approx 0,2823$$

D.h. die Verteilungsfunktion F_Y besitzt an den Stellen $y = 0$ und $y = 7$ Sprünge der Höhe 0,3606 bzw. 0,2823. Im Intervall $(0, 7)$ verläuft F_Y stetig und besitzt wegen $X = Y + 1$ dort die Dichtefunktion $f_Y(y) = f_X(y + 1)$ (siehe folgende Abbildung).

Beispiel (Fortsetzung)

Die Zufallsvariable Y besitzt somit die Verteilungsfunktion

$$F_Y(y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \\ 0,3606 & \text{für } y = 0 \\ 1 - e^{-((y+1)/5)^{0,5}} & \text{für } y \in (0, 7) \\ 1 & \text{für } y \geq 7 \end{cases} \quad (11)$$



Beispiel (Fortsetzung)

Da F_Y im Intervall $(0, 7)$ streng monoton wachsend (injektiv) ist, kann für diesen Bereich die Quantilfunktion durch Auflösen der Gleichung

$$u = 1 - e^{-((y+1)/5)^{0,5}}$$

nach y bestimmt werden. Man erhält dann

$$y = F_Y^{-1}(u) = 5(-\ln(1-u))^2 - 1 \quad \text{für } u \in (0,3606; 0,7177).$$

Somit besitzt die Zufallsvariable

$$Z := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq U \leq 0,3606 \\ 5(-\ln(1-U))^2 - 1 & \text{für } 0,3606 < U < 0,7177 \\ 7 & \text{für } 0,7177 \leq U \leq 1 \end{cases} \quad (12)$$

mit $U \sim U(0, 1)$ die Verteilungsfunktion (11).

10. Monte-Carlo-Simulation

10.4 Inversionsmethode

Werden die beiden Aussagen des Simulationslemmas (siehe Abschnitt 10.3) kombiniert, kann eine beliebige Zufallsvariable X mit **stetiger Verteilungsfunktion** so transformiert werden, dass sie eine beliebig vorgegebene Verteilungsfunktion besitzt.

Beispiel (Erzeugung einer $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung aus einer $N(0, 1)$ -Verteilung)

Die Zufallsvariable X sei $N(0, 1)$ -verteilt. Dann gilt gemäß Teil b) des Simulationslemmas (siehe Abschnitt 10.3)

$$\Phi(X) \sim U(0, 1).$$

Da die Quantilfunktion einer $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung durch

$$F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(u) \quad \text{für } u \in (0, 1)$$

gegeben ist (vgl. (9)), folgt mit Teil a) des Simulationslemmas, dass die Zufallsvariable

$$Y := -\frac{1}{\lambda} \ln(\Phi(X))$$

eine $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung besitzt.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.4 Inversionsmethode

Bemerkung: Die Inversionsmethode besitzt den Vorteil, dass sie sehr einfach anzuwenden ist, wenn sich die verallgemeinere Inverse der Verteilungsfunktion, für die Pseudozufallszahlen generiert werden sollen, **analytisch berechnen** lässt. In vielen Fällen ist dies jedoch nicht möglich und sie muss dann numerisch ermittelt werden (z.B. bei der Normalverteilung), was dann zu langen Rechenzeiten führen kann. In solchen Fällen ist es dann meistens effizienter andere Methoden, wie z.B. die in Abschnitt 10.5 betrachtete **Verwerfungsmethode**, einzusetzen.

Abschnitt 10.5

Verwerfungsmethode

10. Monte-Carlo-Simulation

10.5 Verwerfungsmethode

Viele Verteilungsfunktionen F können nicht in analytisch geschlossener Form angegeben werden oder ihre verallgemeinerte Inverse (Quantilfunktion) F^{-1} kann nicht analytisch ermittelt werden. In solchen Fällen ist es häufiger effizienter für die Verteilungsfunktionen Pseudozufallszahlen nicht direkt, sondern indirekt zu berechnen. Ein solches **indirektes Verfahren** ist die **Verwerfungsmethode** (engl. acceptance-rejection method), welche auf den Mathematiker JOHN VON NEUMANN (1903–1957) zurückgeht.



Im Folgenden sei F eine **Verteilungsfunktion mit der Dichtefunktion** f , deren Quantilfunktion F^{-1} nicht analytisch bestimmt werden kann und deshalb die Anwendung der Inversionsmethode zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen mit der Verteilungsfunktion F ineffizient ist. Es wird daher eine **absolutstetige Hilfszufallsvariable** Y mit Verteilungsfunktion G und Dichtefunktion g betrachtet, für die problemlos (z.B. mit der Inversionsmethode) Pseudozufallszahlen mit der Verteilungsfunktion G erzeugt werden können. Ferner wird angenommen, dass es für die Dichtefunktion g eine Konstante $M > 0$ mit der Eigenschaft

$$f(x) \leq Mg(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gibt, d.h. dass $Mg(x)$ eine **majorisierende Funktion** von f ist.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.5 Verwerfungsmethode

Die **Verwerfungsmethode** basiert dann auf dem folgenden Resultat:

Satz (Verwerfungsmethode)

Es sei F eine Verteilungsfunktion mit der Dichtefunktion f und Y eine absolutstetige Zufallsvariable, für deren Dichtefunktion g es eine Konstante $M > 0$ mit der Eigenschaft

$$f(x) \leq Mg(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad (13)$$

gibt. Ferner sei die Zufallsvariable $U \sim U(0, 1)$ stochastisch unabhängig von Y . Dann besitzt die Zufallsvariable

$$X := Y \left| U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)} \right.$$

die Verteilungsfunktion F .

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(Y \leq x \left| U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right.\right) = \frac{\mathbb{P}\left(Y \leq x \text{ und } U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right)}{\mathbb{P}\left(U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right)} \quad (14)$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.5 Verwerfungsmethode

Beweis (Fortsetzung): Für den Zähler von (14) folgt aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit von Y und U :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y \leq x \text{ und } U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right) &= \int_{y \leq x, u \leq \frac{f(y)}{Mg(y)}} f_{(U,Y)}(u,y) d(u,y) = \int_{-\infty}^x \int_0^{\frac{f(y)}{Mg(y)}} f_U(u) g(y) du dy \\ &= \int_{-\infty}^x \int_0^{\frac{f(y)}{Mg(y)}} du g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{f(y)}{Mg(y)} g(y) dy = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^x f(y) dy = \frac{1}{M} F(x)\end{aligned}$$

Für den Nenner von (14) erhält man analog:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right) &= \int_{u \leq \frac{f(y)}{Mg(y)}} f_{(U,Y)}(u,y) d(u,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{f(y)}{Mg(y)}} f_U(u) g(y) du dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{f(y)}{Mg(y)}} du g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{Mg(y)} g(y) dy = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = \frac{1}{M}\end{aligned}\tag{15}$$

Eingesetzt in (14) liefert dies für $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \frac{\frac{1}{M} F(x)}{\frac{1}{M}} = F(x)$$

und damit die Behauptung $X \sim F$.

10. Monte-Carlo-Simulation

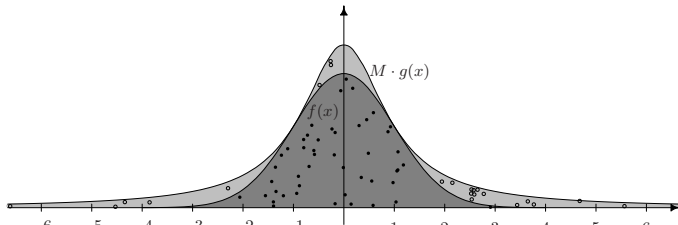
10.5 Verwerfungsmethode

Obiger Satz führt zum folgenden Algorithmus:

Algorithmus (Verwerfungsmethode)

- 1) Erzeuge $Y \sim G$.
- 2) Unabhängig von Y erzeuge $U \sim U(0, 1)$.
- 3) Setze $X := Y$, falls $U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}$ gilt. Andernfalls gehe zurück zu Schritt 1).

Bei der Verwerfungsmethode werden folglich Pseudozufallszahlen der Verteilungsfunktion G erzeugt, die jeweils mit der **Wahrscheinlichkeit** $\frac{f(y)}{Mg(y)}$ angenommen werden. D.h. in der untenstehende Abbildung ist der **Annahmebereich** dunkelgrau und der **Ablehnungsbereich** hellgrau dargestellt.



10. Monte-Carlo-Simulation

10.5 Verwerfungsmethode

Die **Annahmewahrscheinlichkeit** für eine Pseudozufallszahl der Verteilungsfunktion G beträgt

$$\mathbb{P}\left(U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right) = \frac{1}{M} \quad (16)$$

(vgl. (15)). Die **benötigte Anzahl N an erzeugten Pseudozufallszahlen für G um eine Pseudozufallszahl für F zu erhalten**, ist somit zufallsabhängig und mit (16) erhält man für diese diskrete Zufallsvariable N die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\mathbb{P}(N = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad \text{mit} \quad p := \frac{1}{M}$$

für $k \in \mathbb{N}$. D.h. $\tilde{N} := N - 1$ besitzt die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\mathbb{P}(\tilde{N} = k) = \mathbb{P}(N = k + 1) = (1 - p)^k p \quad \text{mit} \quad p = \frac{1}{M}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$ und ist folglich eine **geometrisch-verteilte** Zufallsvariable mit dem Parameter $p = \frac{1}{M}$. Daraus folgt

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\tilde{N}] + 1 = \frac{1 - p}{p} + 1 = \frac{1}{p} = M$$

(vgl. Abschnitt 4.4).

10. Monte-Carlo-Simulation

10.5 Verwerfungsmethode

D.h. bis eine Pseudozufallszahl der Verteilungsfunktion G als eine Pseudozufallszahl der Verteilungsfunktion F angenommen wird, müssen **durchschnittlich M** Pseudozufallszahlen für die Verteilungsfunktion G erzeugt werden. Der Kehrwert $\frac{1}{M}$ ist somit ein **Maß für die Effizienz** des Algorithmus der Verwerfungsmethode.

Aus Effizienzgründen sollte daher die Hilfsdichte g die Dichtefunktion f möglichst gut approximieren, so dass die **Konstante M möglichst klein**, d.h. nahe bei

$$M^* := \inf_{M \geq 1} \{f(x) \leq M g(x)\},$$

gewählt werden kann. Da f und g Dichten sind, kann aber **M nicht kleiner als 1** sein, denn zusammen mit $f \leq M g$ impliziert dies:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \leq M \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = M$$

Wie man sieht leicht überlegt, kann es eine Konstante M mit der Eigenschaft (13) nur dann geben, wenn die Verteilungsfunktion G **schwerere Tails** als die Verteilungsfunktion F besitzt.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.5 Verwerfungsmethode

Bemerkungen: Die Verwerfungsmethode kann auch angewendet werden, wenn die Dichte f der Verteilungsfunktion F nur bis auf eine **Proportionalitätskonstante** $c > 0$ bekannt ist, d.h. wenn

$$f(x) = cq(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

gilt und nur $q(x)$ bekannt ist. Denn völlig analog kann gezeigt werden, dass für eine Konstante $M > 0$ mit der Eigenschaft

$$q(x) \leq Mg(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

die Zufallsvariable

$$X := Y|U \leq \frac{q(Y)}{Mg(Y)}$$

mit $Y \sim G$ und $U \sim U(0,1)$ sowie Y und U stochastisch unabhängig die Verteilungsfunktion F besitzt. Aufgrund dieser Eigenschaft eignet sich die Verwerfungsmethode auch gut zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen für Verteilungsfunktionen mit einer **bedingten Dichtefunktion**

$$f(\theta|x_1, \dots, x_k) = \frac{f(\theta, x_1, \dots, x_k)}{f(x_1, \dots, x_k)},$$

da für die Anwendung der Verwerfungsmethode die gemeinsame Dichtefunktion $f(x_1, \dots, x_k)$ nicht bekannt sein muss.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.5 Verwerfungsmethode

Beispiel (Verwerfungsmethode für $\Gamma(\frac{3}{2}, 1)$ -Verteilung)

Die $\Gamma(\frac{3}{2}, 1)$ -Verteilung besitzt die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ berücksichtigt wurde (vgl. Abschnitt 4.7). Als Hilfsdichte wird die Dichtefunktion der $\text{Exp}(\frac{2}{3})$ -Verteilung

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3}x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verwendet. Zur Berechnung einer möglichen kleinen Konstante $M \geq 1$ mit $f \leq Mg$ wird die folgende Funktion betrachtet:

$$h : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto h(x) := \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} e^{-\frac{1}{3}x}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Für die erste Ableitung von h erhält man:

$$h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{1}{3}x} - \sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-\frac{1}{3}x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{3}x} \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$$

D.h. h' besitzt genau eine Nullstelle bei $x_0 := \frac{3}{2}$. Ferner gilt

$$h'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } 0 < x < x_0 \\ < 0 & \text{für } x > x_0 \end{cases}.$$

Die Funktion h besitzt somit bei x_0 eine globale Maximalstelle und das globale Maximum beträgt

$$h(x_0) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi e}}.$$

Beispiel (Fortsetzung)

Folglich gilt

$$f(x) \leq Mg(x) \quad \text{für alle } x > 0$$

mit

$$M := \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi e}} \approx 1,2573. \quad (17)$$

Man kann leicht zeigen, dass die $\text{Exp}(\frac{2}{3})$ -Verteilung die beste Wahl unter allen Exponentialverteilungen ist, d.h. diejenige mit minimalem M , so dass $f(x) \leq Mg(x)$ für alle $x > 0$ gilt. Anstelle der Dichtefunktion der $\text{Exp}(\frac{2}{3})$ -Verteilung ist hierzu einfach die Dichtefunktion der $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung zu betrachten. Völlig analog erhält man dann einen Ausdruck für den optimalen Wert der Konstante M , der vom Parameter $\lambda > 0$ abhängt. Wird dieser Ausdruck bzgl. λ minimiert, erhält man, dass M für $\lambda = \frac{2}{3}$ minimal ist.

Beispiel (Fortsetzung)

Da sich für eine Exponentialverteilung gut Pseudozufallszahlen generieren lassen (z.B. mit Hilfe der Inversionsmethode, vgl. Abschnitt 10.3), erhält man mit dem optimalen Wert (17) für die Konstante M den folgenden effizienten Algorithmus zur Erzeugung von Pseudozufallszahlen für die $\Gamma(\frac{3}{2}, 1)$ -Verteilung:

- 1) Erzeuge $U_1 \sim U(0, 1)$ und setze $Y := -\frac{3}{2} \ln(U_1)$ (vgl. (10)).
- 2) Unabhängig von Y erzeuge $U_2 \sim U(0, 1)$.
- 3) Setze $X := Y$, falls

$$U_2 \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)} = \sqrt{\frac{2e}{3}} \sqrt{Y} e^{-\frac{1}{3}Y}$$

gilt. Andernfalls gehe zurück zu Schritt 1).

Abschnitt 10.6

Erzeugung korrelierter normalverteilter Zufallsvariablen

10. Monte-Carlo-Simulation

10.6 Erzeugung korrelierter normalverteilter Zufallsvariablen

In vielen finanzwirtschaftlichen Fragestellungen wird unterstellt, dass die betrachteten Größen untereinander **korreliert** und **normalverteilt** sind (z.B. logarithmierte Tagesrenditen, Veränderung der Risikofaktoren, siehe Abschnitt 2.7). Im Folgenden soll daher gezeigt werden, wie korrelierte und normalverteilte Pseudozufallszahlen erzeugt werden können.

Hierzu wird die **n -dimensionale Normalverteilung**

$$N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und positiv-definiten Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Für die Varianz-Kovarianz-Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ existiert die sog. **Cholesky-Zerlegung**. Denn es gilt der folgende Satz:

10. Monte-Carlo-Simulation

10.6 Erzeugung korrelierter normalverteilter Zufallsvariablen

Satz (Cholesky-Zerlegung)

Eine Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann symmetrisch und positiv-definit, wenn es genau eine invertierbare untere Dreiecksmatrix der Form

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & \dots & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (18)$$

mit der Eigenschaft $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \Sigma$ gibt (sog. Cholesky-Zerlegung von Σ).

Beweis: Siehe z.B. HÄMMERLIN-HOFFMANN (1989), Seite 66. ■

Die Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der Cholesky-Zerlegung $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \Sigma$ kann **spaltenweise rekursiv** berechnet werden. Für die Einträge in der ersten Spalte von $\mathbf{C}$ gilt:

$$c_{i1} = \begin{cases} \sqrt{\sigma_1^2} & \text{für } i = 1 \\ \frac{\sigma_{i1}}{c_{11}} & \text{für } i > 1 \end{cases} \quad (19)$$

Sind die Einträge in den ersten $k - 1$ Spalten für $k > 1$ berechnet, lassen sich damit die Einträge in der k -ten Spalte von $\mathbf{C}$ wie folgt berechnen:

10. Monte-Carlo-Simulation

10.6 Erzeugung korrelierter normalverteilter Zufallsvariablen

$$c_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < k \\ \sqrt{\sigma_k^2 - \sum_{l=1}^{k-1} c_{kl}^2} & \text{für } i = k \\ \frac{1}{c_{kk}} \left(\sigma_{ik} - \sum_{l=1}^{k-1} c_{il} c_{kl} \right) & \text{für } i > k \end{cases} \quad (20)$$

Zur Berechnung von (18) stehen weitere numerische Standardalgorithmen zur Verfügung, die in vielen Statistikprogrammen und Programmiersprachen (z.B. in R) implementiert sind.

Ist nun

$$\mathbf{Y} := (Y_1, \dots, Y_n)^T \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{E}) \quad (21)$$

ein **multivariat standardnormalverteilter Zufallsvektor** und

$$\mathbf{X} := \mathbf{C}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu}, \quad (22)$$

eine **affin-lineare Transformation von $\mathbf{Y}$** , wobei die Matrix $\mathbf{C}$ so gewählt ist, dass $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \boldsymbol{\Sigma}$ gilt, dann ist auch $\mathbf{X}$ multivariat normalverteilt mit Erwartungswertvektor

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{C}\mathbb{E}[\mathbf{Y}] + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$$

und Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\text{Cov}(\mathbf{Y})\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{C}^T = \boldsymbol{\Sigma}.$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.6 Erzeugung korrelierter normalverteilter Zufallsvariablen

D.h. es gilt

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

(siehe Abschnitt 8.3). D.h. um n korrelierte und normalverteilte Pseudozufallszahlen $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und Varianz-Kovarianz-Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ zu erzeugen, **genügt es n unabhängige standardnormalverteilte Pseudozufallszahlen (21) zu generieren** und diese anschließend gemäß (22) affin-linear zu transformieren.

Mit Hilfe der nach den beiden Statistikern GEORGE E. P. BOX (1919–2013) und MERVIN E. MULLER benannten **Box-Muller-Methode** (1928–2018) können auf effiziente Weise Paare von unabhängigen standardnormalverteilten Pseudozufallszahlen erzeugt werden.



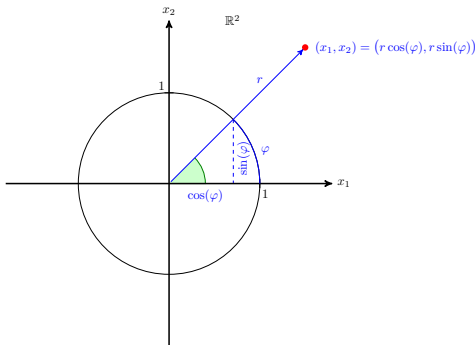
Diese Methode basiert auf dem Sachverhalt, dass für **zwei unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen X_1 und X_2** mittels des Transformationssatzes für multivariate Dichtefunktionen (siehe Abschnitt 8.2) gezeigt werden kann, dass die **Polarkoordinaten $(R, \Phi)^T$** des Zufallsvektors $(X_1, X_2)^T$ ebenfalls unabhängig sind und

$$R^2 \sim \text{Exp}(1/2) \quad \text{bzw.} \quad \Phi \sim U[0, 2\pi).$$

gilt (vgl. z.B. BECKER ET AL. (2016), Seite 168).

10. Monte-Carlo-Simulation

10.6 Erzeugung korrelierter normalverteilter Zufallsvariablen



Aus den Polarkoordinaten (r, φ) (d.h. den Realisierungen von $(R, \Phi)^T$) können mit Hilfe der Abbildung

$$T : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

die kartesischen Koordinaten (x_1, x_2) (d.h. die Realisierungen von $(X_1, X_2)^T$) berechnet werden.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.6 Erzeugung korrelierter normalverteilter Zufallsvariablen

Zusammen mit (10) motiviert dies den folgenden direkten (d.h. nicht-iterativen) Algorithmus zur Erzeugung von **Paaren unabhängiger standardnormalverteilter Pseudozufallszahlen**:

Algorithmus (Box-Muller-Methode)

- 1) Erzeuge unabhängig voneinander $U_1, U_2 \sim U(0, 1)$.
- 2) Definiere $R := \sqrt{-2 \ln(U_1)}$ und $\Phi := 2\pi U_2$.
- 3) Setze $X_1 := R \cos(\Phi)$ und $X_2 := R \sin(\Phi)$.

Bemerkungen:

- Die Pseudozufallszahlen X_1 und X_2 sind unabhängig und standardnormalverteilt. Durch eine affin-lineare Transformation $\mu + \sigma X$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ können daraus **unabhängige und beliebig normalverteilte Pseudozufallszahlen** erzeugt werden.
- Unabhängige und standardnormalverteilte Pseudozufallszahlen können auch mit der **Verwerfungsmethode** effizient erzeugt werden.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.6 Erzeugung korrelierter normalverteilter Zufallsvariablen

Beispiel (Bivariate $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ -Verteilung aus zwei unabhängigen $Y_1, Y_2 \sim N(0, 1)$)

Es sollen zwei korrelierte normalverteilte Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit den Momenten

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu_1, \mathbb{E}[X_2] = \mu_2, \text{Var}(X_1) = \sigma_1^2, \text{Var}(X_2) = \sigma_2^2 \text{ und } \text{Cov}(X_1, X_2) = \sigma_{12}$$

erzeugt werden. D.h. die Varianz-Kovarianz-Matrix des bivariaten Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{21} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Mit (19)-(20) erhält man für die Cholesky-Zerlegung $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \boldsymbol{\Sigma}$ die 2×2 -Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \frac{\sigma_{21}}{\sigma_1} & \sqrt{\sigma_2^2 - (\sigma_{21}/\sigma_1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \rho := \frac{\sigma_{21}}{\sigma_1\sigma_2}.$$

Beispiel (Fortsetzung)

Aus einem bivariaten Zufallsvektors

$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{E})$$

mit zwei unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 erhält man durch eine affin-lineare Transformation den bivariaten normalverteilten Zufallsvektor (vgl. (22)):

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &:= \mathbf{C}\mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 Y_1 + \mu_1 \\ \rho\sigma_2 Y_1 + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} Y_2 + \mu_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.6 Erzeugung korrelierter normalverteilter Zufallsvariablen

Beispiel (Fortsetzung)

Für diesen bivariaten Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ gilt wie gefordert

$$\mathbb{E}[X_1] = \mu_1$$

$$\mathbb{E}[X_2] = \mu_2$$

$$\text{Var}(X_1) = \sigma_1^2$$

$$\text{Var}(X_2) = \rho^2 \sigma_2^2 + \sigma_2^2 (1 - \rho^2) = \sigma_2^2$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \rho \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_{21}$$

und damit

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Abschnitt 10.7

Monte-Carlo-Integration

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Unter der Bezeichnung **Monte-Carlo-Simulation** werden Algorithmen verstanden, bei denen mittels eines Computers zuerst viele unabhängige Pseudozufallszahlen für die Verteilung eines zugrundeliegenden stochastischen oder deterministischen Modells erzeugt werden (z.B. Gesamtschaden- oder Solvenzmodell). In einem zweiten Schritt werden damit für die interessierende Größe des stochastischen oder deterministischen Modells (z.B. Gesamtschadenhöhe oder benötigtes Risikokapital) Realisierungen berechnet, die dann in einem dritten Schritt statistisch ausgewertet werden. D.h. eine Monte-Carlo- Simulation besteht i.A. aus den folgenden drei Schritten:

- 1) Erzeuge n unabhängige Pseudozufallszahlen $X_1, \dots, X_n$ für die Verteilung des zugrundeliegenden stochastischen oder deterministischen Modells (z.B. Gesamtschaden- oder Solvenzmodell).
- 2) Berechne damit die simulierten Werte $Y_1 = g(X_1), \dots, Y_n = g(X_n)$ der interessierenden Größe (z.B. Gesamtschadenhöhe oder benötigtes Risikokapital).
- 3) Werte die simulierten Beobachtungen $Y_1, \dots, Y_n$ aus (z.B. Berechnung des Mittelwerts, Stichprobenvarianz, empirische Verteilung oder Quantile).

Die mathematische Grundlage für die Monte-Carlo-Simulation bilden das **starke Gesetz der großen Zahlen** und der **Satz von Glivenko-Cantelli**, der auch als **Hauptsatz der Statistik** bezeichnet wird.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Das **starke Gesetz der großen Zahlen** lautet wie folgt:

Satz (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)

Sind $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige und identisch-verteilte Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert μ , dann konvergiert das arithmetische Mittel $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ für $n \rightarrow \infty$ fast sicher gegen μ . D.h. es gilt

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu \right) = 1.$$

Beweis: Siehe z.B. MEINTRUP-SCHÄFFLER (2005), Seiten 159–161. ■

Das starke Gesetz der großen Zahlen liefert eine mathematische Begründung dafür, für große n zur Schätzung des Erwartungswertes μ von stochastisch unabhängigen und identisch-verteilten Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das **arithmetische Mittel** $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ zu verwenden.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Der **Satz von Glivenko-Cantelli (Hauptsatz der Statistik)** liefert dagegen eine mathematisch Rechtfertigung dafür, für große n zur Schätzung der Verteilungsfunktion F von stochastisch unabhängigen und identisch-verteilten Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die **empirische Verteilungsfunktion** zu verwenden. Genauer gilt:

Satz (Satz von Glivenko-Cantelli)

Sind $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige und identisch-verteilte Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion F , dann konvergiert die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, x]}(X_i)$ für $n \rightarrow \infty$ fast sicher und gleichmäßig gegen F . D.h. es gilt

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| = 0 \right) = 1.$$

Beweis: Siehe z.B. PESTMANN (1998), Seite 303ff. ■

Diese beiden Resultate rechtfertigen es für hinreichende große n vom arithmetischen Mittel und der empirischen Verteilung von simulierten Werten auf den Erwartungswert bzw. die Verteilung der zugrundeliegenden stochastisch unabhängigen und identisch-verteilten Zufallsvariablen zu schließen.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Im Folgenden soll das klassische und häufigste Anwendungsgebiet für Monte-Carlo-Simulationen, nämlich die **Approximation von Erwartungswerten**, genauer betrachtet werden. Man spricht in diesem Fall auch häufig von **Monte-Carlo-Integration**. Dabei betrachtet man den Erwartungswert einer Zufallsvariablen $g(X)$ (seine Existenz vorausgesetzt):

$$\mathbb{E}[g(X)] = \begin{cases} \sum g(x)f_X(x) & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int g(x)f_X(x) dx & \text{falls } X \text{ absolutstetig} \end{cases}$$

Sind nun $X_1, \dots, X_n$ **stochastisch unabhängige und identisch-verteilte Zufallsvariablen** mit der Verteilungsfunktion F_X , dann sind auch $g(X_1), \dots, g(X_n)$ stochastisch unabhängige und identisch-verteilte Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion $F_{g(X)}$ und

$$\widehat{g}_n(X) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \quad (23)$$

wird als **(naiver) Monte-Carlo-Schätzer** bzw. seine Realisierung als **Monte-Carlo-Schätzung** für $\mathbb{E}[g(X)]$ bezeichnet.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Falls $g(X)$ einen endlichen Erwartungswert besitzt, gilt:

$$\mathbb{E}[\hat{g}_n(X)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[g(X_i)] = \mathbb{E}[g(X)]$$

D.h. der Monte-Carlo-Schätzer (23) ist dann ein **erwartungstreuer** Schätzer für $\mathbb{E}[g(X)]$. Besitzt $g(X)$ darüberhinaus eine endliche Varianz, dann ist die Varianz des Monte-Carlo-Schätzers (23) aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit von $g(X_1), \dots, (X_n)$ gegeben durch

$$\text{Var}(\hat{g}_n(X)) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(g(X_i)) = \frac{1}{n} \text{Var}(g(X)). \quad (24)$$

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt ferner, dass der Monte-Carlo-Schätzer (23) für $n \rightarrow \infty$ fast sicher gegen $\mathbb{E}[g(X)]$ konvergiert. D.h es gilt

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{g}_n(X) = \mathbb{E}[g(X)]\right) = 1.$$

Mit der Ungleichung von Chebyshev (vgl. MEINTRUP- SCHÄFFLER (2005), Seite 105)) erhält man ferner für den Monte-Carlo-Schätzer (23):

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

$$\mathbb{P}(|\hat{g}_n(X) - \mathbb{E}[g(X)]| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(\hat{g}_n(X)) = \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(g(X_i)) = \frac{\text{Var}(g(X))}{n \varepsilon^2}$$

Für ein beliebiges $q \in (0, 1)$ und $\varepsilon \geq \sqrt{\frac{\text{Var}(g(X))}{n(1-q)}}$ folgt daraus

$$\mathbb{P}(|\hat{g}_n(X) - \mathbb{E}[g(X)]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(g(X))}{n} \frac{n(1-q)}{\text{Var}(g(X))} = 1 - q$$

und damit die **Fehlerabschätzung**

$$\boxed{\mathbb{P}(|\hat{g}_n(X) - \mathbb{E}[g(X)]| < \varepsilon) \geq q.} \quad (25)$$

Zu einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $q \in (0, 1)$ gibt es somit eine Konstante $\varepsilon > 0$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Monte-Carlo-Schätzer $\hat{g}_n(X)$ um weniger als ε von seinem Erwartungswert $\mathbb{E}[g(X)]$ abweicht, mindestens q beträgt. Da $\varepsilon > 0$ für $n \rightarrow \infty$ immer kleiner gewählt werden kann, erhält man für den Bereich um den Erwartungswert $\mathbb{E}[g(X)]$, in dem der Monte-Carlo-Schätzer $\hat{g}_n(X)$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens q liegt, den sog. **Chebyshev-Trichter** (vgl. nächstes Beispiel).

10. Monte-Carlo-Simulation

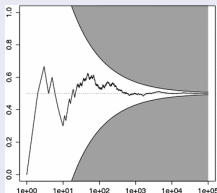
10.7 Monte-Carlo-Integration

Beispiel (Chebyshev-Trichter für Monte-Carlo-Schätzer)

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien stochastisch unabhängige und identisch-verteilt, so dass $g(X_i) \sim \text{Bin}(1, p)$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. D.h. es gilt $\mathbb{E}[g(X)] = p$ und $\text{Var}(g(X)) = p(1-p)$ und mit (25) erhält man somit für den Monte-Carlo-Schätzer $\hat{g}_n(X)$ zur Schätzung von p die Fehlerabschätzung

$$\mathbb{P}(|\hat{g}_n(X) - p| < \varepsilon) \geq q \quad \text{für alle } q \in (0, 1) \text{ und } \varepsilon \geq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n(1-q)}}.$$

Die Abbildung zeigt den für $n \rightarrow \infty$ resultierenden Chebyshev-Trichter für den Fall, dass $p = \frac{1}{2}$ und $q = 0,95$ gilt.



Mit dem zentralen Grenzwertsatz lässt sich eine Aussage zur **Grenzverteilung des Fehlers** $\hat{g}_n(X) - \mathbb{E}[g(X)]$ herleiten.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Satz (Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy)

Sind $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige und identisch-verteilte Zufallsvariablen mit $0 < \text{Var}(X) < \infty$, dann gilt für die standardisierte Summenvariable

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} Z \sim N(0, 1). \quad (26)$$

Beweis: Siehe z.B. MEINTRUP-SCHÄFFLER (2005), Seiten 159–161. ■

Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{g}_n(X) - \mathbb{E}[g(X)] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) - \mathbb{E}[g(X)] \\ &= \frac{\sqrt{\text{Var}(g(X))}}{\sqrt{n}} \frac{\sum_{i=1}^n g(X_i) - n\mathbb{E}[g(X)]}{\sqrt{\text{Var}(g(X))}\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Mit (26) erhält man somit, dass für $0 < \text{Var}(g(X)) < \infty$ der Fehler $\hat{g}_n(X) - \mathbb{E}[g(X)]$ für **hinreichend große n näherungsweise $N(0, \text{Var}(g(X))/n)$ -verteilt** ist.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Ein **erwartungstreuer Schätzer** für $\text{Var}(g(X))$ ist durch die **(korrigierte) Stichprobenvarianz**

$$\widehat{\text{Var}}(g(X)) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (g(X_i) - \widehat{g}_n(X))^2 \quad (27)$$

gegeben. D.h. es gilt:

$$\mathbb{E}[\widehat{\text{Var}}(g(X))] = \text{Var}(g(X))$$

Zusammen mit (24) folgt daraus, dass durch

$$\widehat{\text{Var}}(\widehat{g}_n(X)) := \frac{\widehat{\text{Var}}(g(X))}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (g(X_i) - \widehat{g}_n(X))^2 \quad (28)$$

ein **erwartungstreuer Schätzer** für die Varianz des Monte-Carlo-Schätzers, d.h. für $\text{Var}(\widehat{g}_n(X))$, gegeben ist. Denn es gilt:

$$\mathbb{E}[\widehat{\text{Var}}(\widehat{g}_n(X))] = \frac{\mathbb{E}[\widehat{\text{Var}}(g(X))]}{n} = \frac{\text{Var}(g(X))}{n} = \text{Var}(\widehat{g}_n(X))$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Wie oben mittels zentralen Grenzwertsatzes gezeigt wurde, ist der Monte-Carlo-Schätzer $\hat{g}_n(X)$ für hinreichend große n näherungsweise $N(\mathbb{E}[g(X)], \text{Var}(g(X))/n)$ -verteilt. Für das (asymptotische) 95%-Konfidenzintervall von $\mathbb{E}[g(X)]$ erhält man daher die Monte-Carlo-Schätzung

$$\begin{aligned} & \left[\hat{g}_n(X) - 1,96\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{g}_n(X))}; \hat{g}_n(X) + 1,96\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{g}_n(X))} \right] \\ &= \left[\hat{g}_n(X) - 1,96\sqrt{\frac{\widehat{\text{Var}}(g(X))}{n}}; \hat{g}_n(X) + 1,96\sqrt{\frac{\widehat{\text{Var}}(g(X))}{n}} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

(vgl. (28)).

Das (asymptotische) 95%-Konfidenzintervall (29) zieht sich mit der Rate $n^{-1/2}$ zusammen. D.h. zum Beispiel, dass bei vierfachem Simulationsumfang ein halb so breites Konfidenzintervall resultiert und dass für einer weitere genaue Dezimalstelle der Monte-Carlo-Schätzung (d.h. die Breite des Konfidenzintervalls verringert sich um den Faktor 10) der 100-fache Simulationsumfang benötigt wird (vgl. auch das Beispiel in Abschnitt 10.1).

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Die große Leistungsfähigkeit der Monte-Carlo-Integration basiert auf der Tatsache, dass sich viele Größen als Erwartungswert einer Zufallsvariablen ausdrücken lassen. Zum Beispiel:

- a) **Wahrscheinlichkeiten:** Es gilt

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[1_A(X)].$$

- b) **Integrale:** Für eine auf dem Intervall $[a, b]$ gleichverteilte Zufallsvariable $X \sim U[a, b]$ gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &= (b-a) \int_a^b g(x) \frac{1}{b-a} dx \\ &= (b-a) \int_a^b g(x) f_X(x) dx = (b-a) \mathbb{E}[g(X)]. \end{aligned}$$

- c) **Summen:** Für eine gleichverteilte diskrete Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}(X \in A) = 1$ und $\mathbb{P}(X = x) = p$ für alle $x \in A$ gilt

$$\sum_{x \in A} g(x) = \frac{1}{p} \sum_{x \in A} p g(x) = \frac{1}{p} \mathbb{E}[g(X)].$$

D.h. Wahrscheinlichkeiten, Integrale und Summen können mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation approximiert werden.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Beispiel (Monte-Carlo-Integration)

Die Zufallsvariable $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ mit $\alpha, \beta > 0$ beschreibe die Schadenhöhe bei einer Haftpflichtversicherung und die Gesamtschadenhöhe (d.h. z.B. inkl. Schadenersatzleistungen) sei durch cX mit $c > 1$ gegeben. Ferner wird angenommen, dass der gedeckte Höchstschaden $u > 0$ betrage. Der Versicherer ist folglich am Erwartungswert und der Varianz der Zufallsvariablen

$$g(X) := \min \{cX, u\}$$

interessiert. Im Folgenden werden $\mathbb{E}[g(X)]$ und $\text{Var}(g(X))$ sowohl analytisch als auch mittels Monte-Carlo-Simulation ermittelt, um die Güte der Monte-Carlo-Integration beurteilen zu können.

Analytisch: Die Zufallsvariable $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ besitzt die Dichtefunktion

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 4.7). Damit erhält man für den Erwartungswert von $g(X)$:

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \min\{cx, u\} f_X(x) dx \\&= \int_0^{\frac{u}{c}} cx f_X(x) dx + \int_{\frac{u}{c}}^{\infty} u f_X(x) dx \\&= \int_0^{\frac{u}{c}} cx \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx + u \int_{\frac{u}{c}}^{\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\&= \frac{c\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{u}{c}} \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{(\alpha+1)-1} e^{-\beta x} dx + u(1 - F_X(u/c; \alpha, \beta)) \\&= \frac{c\alpha}{\beta} F_X(u/c; \alpha+1, \beta) + u(1 - F_X(u/c; \alpha, \beta)).\end{aligned}\tag{30}$$

Dabei bezeichnet $F_X(u/c; \alpha, \beta)$ die Verteilungsfunktion von $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ an der Stelle u/c . Völlig analog zeigt man

$$\mathbb{E}[g(X)^2] = \frac{c^2(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} F_X(u/c; \alpha+2, \beta) + u^2(1 - F_X(u/c; \alpha, \beta)).\tag{31}$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Beispiel (Fortsetzung)

Mittels

$$\text{Var}(g(X)) = \mathbb{E}[g(X)^2] - \mathbb{E}[g(X)]^2$$

kann mit (30)–(31) leicht die Varianz von $g(X)$ berechnet werden. Zum Beispiel erhält man für

$$\alpha = 4, \beta = \frac{1}{3}, c = 1,1 \text{ und } u = 20 \quad (32)$$

die Werte

$$\mathbb{E}[g(X)] = 12,4608 \quad \text{und} \quad \text{Var}(g(X)) = 25,9197.$$

Monte-Carlo-Integration: Es gelte wieder (32). Eine Monte-Carlo-Simulation mit $n = 10.000$ simulierten unabhängigen Beobachtungen $X_1, \dots, X_{10.000} \sim \Gamma(4, 1/3)$ liefert mit (23) und (27) für $\mathbb{E}[g(X)]$ und $\text{Var}(g(X))$ die Monte-Carlo-Schätzungen

$$\hat{g}_{10.000}(X) = 12,4844 \quad \text{bzw.} \quad \widehat{\text{Var}}(g(X)) = 25,3016.$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Beispiel (Fortsetzung)

Für die Varianz und die Standardabweichung des Monte-Carlo-Schätzers $\hat{g}_{10.000}(X)$ erhält man mit (28) die Schätzungen

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{10.000}(X)) = \frac{\widehat{\text{Var}}(g(X))}{10.000} = 0,00253016$$

bzw.

$$\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{10.000}(X))} = 0,05030.$$

Für das 95%-Konfidenzintervall von $\mathbb{E}[g(X)]$ erhält man damit die Monte-Carlo-Schätzung

$$[12,4844 - 1,96 \cdot 0,05030; 12,4844 + 1,96 \cdot 0,05030] = [12,38581; 12,58299]$$

(vgl. (29)). Es enthält den Erwartungswert $\mathbb{E}[g(X)] = 12,4608$.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

In Kapitel 3 wurden verschiedene Allokationsverfahren vorgestellt. Eines dieser Verfahren war das **Conditional-Tail-Expectation-Prinzip** (siehe Abschnitt 3.7). Es wurde gezeigt, dass dieses Verfahren ein kohärentes Allokationsverfahren ist und damit viele wünschenswerte Allokationseigenschaften aufweist. Allerdings besitzt dieses Verfahren auch den Nachteil, dass sich die bei der Aufteilung des Gesamtrisikokapitals auf die einzelnen Geschäftsbereiche resultierenden Risikokapitalien häufig nicht analytisch berechnen lassen. Im folgenden Beispiel wird gezeigt, wie in einem solchen Fall die Monte-Carlo-Integration zur Berechnung der Risikokapitalien eingesetzt werden kann:

Beispiel (Risikokapitalallokation mittels Monte-Carlo-Integration)

Betrachtet wird ein Unternehmen, dessen Gesamtrisiko $X = X_1 + X_2$ sich aus den Risiken X_1 und X_2 zweier Geschäftsbereiche zusammensetzt (Werte in Mio. Euro). Die beiden Risiken X_1 und X_2 seien jeweils Lognormal-verteilt, genauer gelte

$$X_1 \sim \text{LN}(-0,0277; 0,0149) \quad \text{und} \quad X_2 \sim \text{LN}(-0,1099; 0,0089)$$

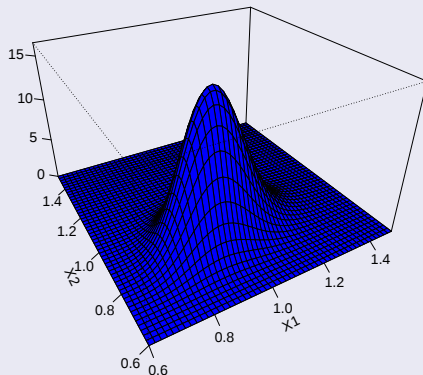
(für die Definition und Eigenschaften der Lognormalverteilung siehe Abschnitt 4.8).

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Beispiel (Fortsetzung)

Ferner wird angenommen, dass die stochastischen Abhängigkeiten zwischen den Risiken in den beiden Geschäftsbereichen durch eine bivariate Gauß-Copula mit Korrelationskoeffizient $\rho = 0,2$ beschrieben werden können (vgl. Abschnitt 9.6). Die Abbildung zeigt die Dichtefunktion des bivariaten Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$.



10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Beispiel (Fortsetzung)

Das für das gesamtunternehmerische Risiko $X = X_1 + X_2$ benötigte Risikokapital soll auf die Einzelrisiken X_1 und X_2 mit Hilfe des Conditional-Tail-Expectation-Prinzips zum Sicherheitsniveau $q = 0,95$ aufgeteilt werden (vgl. Abschnitt 3.7). Positive (negative) Vorzeichen von X_1 und X_2 stehen dabei für Verluste (Gewinne). Hierzu geht man in den folgenden vier Schritten vor:

- 1) Simuliere n bivariate unabhängige Beobachtungen

$$\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right), \dots, \left(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}\right) \sim F_{\mathbf{X}}.$$

- 2) Berechne damit die n simulierten unabhängigen Beobachtungen für das gesamtunternehmerische Risiko:

$$X^{(1)} := X_1^{(1)} + X_2^{(1)}$$

$$\vdots$$

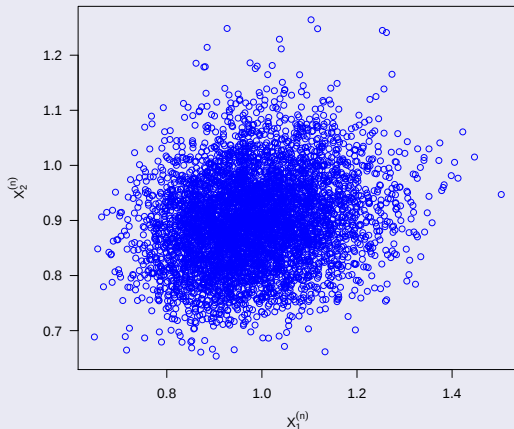
$$X^{(n)} := X_1^{(n)} + X_2^{(n)}$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Beispiel (Fortsetzung)

Das untenstehende Streudiagramm zeigt die n simulierten bivariate Beobachtungen aus Schritt 1).



Beispiel (Fortsetzung)

3) Durch

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, x]}(X^{(i)}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

ist die empirische Verteilung der simulierten Beobachtungen $\{X^{(1)}, \dots, X^{(n)}\}$ für das gesamtunternehmerische Risiko X gegeben. Damit erhält man mit

$$\widehat{\text{VaR}}_{0,95}(X) := \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F_n(x) \geq 0,95\}$$

eine Schätzung für den Value-at-Risk des gesamtunternehmerischen Risikos X zum Sicherheitsniveau $q = 0,95$, d.h. für $\text{VaR}_{0,95}(X)$ (vgl. Abschnitt 2.4).

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Beispiel (Fortsetzung)

- 4) Ermittle alle für das Risiko X_1 simulierten Werte $X_1^{(i)}$, für die

$$X^{(i)} = X_1^{(i)} + X_2^{(i)} > \widehat{\text{VaR}}_{0,95}(X)$$

gilt. Berechne anschließend den Mittelwert

$$\frac{1}{|N|} \sum_{i \in N} X_1^{(i)} \quad \text{mit} \quad N := \left\{ i = 1, \dots, n : X^{(i)} > \widehat{\text{VaR}}_{0,95}(X) \right\}$$

als Monte-Carlo-Schätzung für das dem ersten Geschäftsbereich zugewiesene Risikokapital

$$\text{RK}(X_1) = \mathbb{E}[X_1 | X > \text{VaR}_{0,95}(X)]$$

bei Anwendung des Conditional-Tail-Expectation-Prinzips zum Sicherheitsniveau $q = 0,95$.

Die Monte-Carlo-Schätzung des für den zweiten Geschäftsbereich benötigten Risikokapitals $\text{RK}(X_2) = \mathbb{E}[X_2 | X > \text{VaR}_{0,95}(X)]$ berechnet man analog.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.7 Monte-Carlo-Integration

Beispiel (Fortsetzung)

Für das Risikokapital der beiden Geschäftsbereiche X_1 und X_2 erhält man auf diese Weise für $n = 5000$ Simulationen die Monte-Carlo-Schätzungen (Werte in Mio. Euro):

$$\widehat{RK}(X_1) = \widehat{\mathbb{E}}[X_1 | X > \text{VaR}_{0,95}(X)] = 1,207898$$

$$\widehat{RK}(X_2) = \widehat{\mathbb{E}}[X_2 | X > \text{VaR}_{0,95}(X)] = 1,022148$$

Die Monte-Carlo-Schätzung für das gesamtunternehmerische Risikokapital beträgt somit

$$\widehat{RK}(X) = \widehat{RK}(X_1) + \widehat{RK}(X_2) = 2,230046.$$

Abschnitt 10.8

Varianzreduktion

10. Monte-Carlo-Simulation

10.8 Varianzreduktion

Unter dem Begriff **Varianzreduktion** werden verschiedene Techniken zusammengefasst, mit denen die Genauigkeit einer Monte-Carlo-Simulation verbessert werden kann. Die bekanntesten **Varianzreduktionstechniken** sind:

- a) Antithetische Variablen (engl. antithetic sampling)
- b) Kontrollvariablen (engl. control variates)
- c) Gewichtete Stichproben (engl. importance sampling)
- d) Geschichtete Stichproben (engl. stratified sampling)

Für die Varianz des (naiven) Monte-Carlo-Schätzers

$$\hat{g}_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$$

zur Schätzung von $\mathbb{E}[g(X)]$ gilt bekanntlich

$$\text{Var}(\hat{g}_n(X)) = \frac{1}{n} \text{Var}(g(X)).$$

(vgl. (24)). D.h. die **Konvergenzgeschwindigkeit der Standardabweichung** von $\hat{g}_n(X)$ gegen 0 beträgt nur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ und ist damit sehr langsam. Sie lässt sich i.A. auch nicht weiter verbessern. Um z.B. die Standardabweichung zu halbieren muss der Simulationsumfang n vervierfacht werden.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.8 Varianzreduktion

Um präzisere Monte-Carlo-Schätzer $\hat{g}_n(X)$ zu erhalten, d.h. Schätzer $\hat{g}_n(X)$ mit kleinerer Standardabweichung und damit schmalere Konfidenzintervallen, ist es häufig sinnvoll mit Hilfe einer Varianzreduktionstechnik die Varianz $\text{Var}(g(X))$ zu verringern. Dies kann durch geschickte Wahl der Funktion g oder der Verteilung von X geschehen.

Im Folgenden werden die beiden Varianzreduktionstechniken **antithetische Variablen** und **Kontrollvariablen** betrachtet.

Antithetische Variablen

Der Monte-Carlo-Schätzer

$$\hat{g}_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$$

für $\mathbb{E}[g(X)]$ basiert auf **stochastisch unabhängigen und identisch-verteilten** Zufallsvariablen

$$X_1, \dots, X_n.$$

Er wird deshalb häufig als **naiver Monte-Carlo-Schätzer** bezeichnet und besitzt die Varianz $\text{Var}(\hat{g}_n(X)) = \frac{1}{n} \text{Var}(g(X))$ (vgl. (24)).

10. Monte-Carlo-Simulation

10.8 Varianzreduktion

Unterstellt man, dass $X_1, \dots, X_n$ weiterhin identisch-verteilt, aber nicht mehr notwendigerweise stochastisch unabhängig sind, erhält man für die Varianz von $\hat{g}_n(X)$:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{g}_n(X)) &= \frac{1}{n^2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n g(X_i) \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \text{Var}(g(X_i)) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(g(X_i), g(X_j)) \right) \\ &= \frac{1}{n} \text{Var}(g(X)) + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(g(X_i), g(X_j))\end{aligned}$$

D.h. bei Verwendung von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit der Eigenschaft, dass $g(X_i)$ und $g(X_j)$ paarweise **negativ korreliert** sind, weist der Monte-Carlo-Schätzer $\hat{g}_n(X)$ eine geringere Varianz auf als bei Verwendung von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$.

Beachte: $g(X_i), g(X_j)$ und nicht X_i, X_j müssen negativ korreliert sein.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.8 Varianzreduktion

Beispiel (Antithetische Variablen)

Es wird wieder die Situation aus dem zweiten Beispiel in Abschnitt 10.4 betrachtet. D.h. für die Schadenhöhe gilt $X \sim \text{Weibull}(0,5;5)$ und es wird angenommen, dass der gedeckte Höchstschaden $u = 8$ beträgt und ein Selbstbehalt von $d = 1$ existiert, so dass der Versicherer wieder am Erwartungswert und der Varianz der Zufallsvariablen

$$g(X) := \begin{cases} 0 & \text{für } X \leq 1 \\ X - 1 & \text{für } 1 < X < 8 \\ 7 & \text{für } X \geq 8 \end{cases}$$

interessiert ist. Im zweiten Beispiel in Abschnitt 10.4 wurde gezeigt, dass die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $Y := g(X)$ gegeben ist durch

$$F_Y(y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \\ 0,3606 & \text{für } y = 0 \\ 1 - e^{-((y+1)/5)^{0,5}} & \text{für } 0 < y < 7 \\ 1 & \text{für } y \geq 7 \end{cases} \quad (33)$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.8 Varianzreduktion

Beispiel (Fortsetzung)

Ferner wurde mit Hilfe der Inversionsmethode gezeigt, dass die Zufallsvariable

$$Z := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq U \leq 0,3606 \\ 5(-\ln(1-U))^2 - 1 & \text{für } 0,3606 < U < 0,7177 \\ 7 & \text{für } 0,7177 \leq U \leq 1 \end{cases} \quad (34)$$

für $U \sim U(0,1)$ die Verteilungsfunktion (33) besitzt,

Naive Monte-Carlo-Schätzungen:

Erzeuge $n = 10.000$ unabhängige Pseudozufallszahlen $U_1, \dots, U_{10.000} \sim U(0,1)$.

Eingesetzt in (34) liefert dies die simulierten Beobachtungen $Z_1, \dots, Z_{10.000} \sim F_Y$.

Werden diese simulierten Beobachtungen $Z_1, \dots, Z_{10.000}$ in (23) und (28) eingesetzt, erhält man für $\mathbb{E}[g(X)]$ und $\text{Var}(\hat{g}_{10.000}(X))$ die Monte-Carlo-Schätzungen

$$\hat{g}_{10.000}(X) = 2,8554 \quad \text{bzw.} \quad \widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{10.000}(X)) = 0,00091531.$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.8 Varianzreduktion

Beispiel (Fortsetzung)

Monte-Carlo-Schätzung mit antithetischen Variablen:

Erzeuge 5.000 unabhängige Pseudozufallszahlen $U_1, \dots, U_{5.000} \sim U(0, 1)$ und durch

$$U_{5.000+i} := 1 - U_i \sim U(0, 1) \quad \text{für } i = 1, \dots, 5000$$

weitere 5.000 Pseudozufallszahlen. Die Pseudozufallszahlen U_i und $U_{5.000+i}$ sind für $i = 1, \dots, 5000$ offensichtlich paarweise negativ korreliert. Eingesetzt in (34) erhält man damit die simulierten Beobachtungen $Z_1, \dots, Z_{10.000} \sim F_Y$.

Da die Funktion $5(-\ln(1-u))^2 - 1$ streng monoton wachsend ist, sind auch Z_i und $Z_{5.000+i}$ für $i = 1, \dots, 5000$ paarweise negativ korreliert. Werden die insgesamt 10.000 simulierten Beobachtungen $Z_1, \dots, Z_{10.000}$ in (23) und (28) eingesetzt, erhält man für $\mathbb{E}[g(X)]$ und $\text{Var}(\hat{g}_{10.000}(X))$ die Monte-Carlo-Schätzungen

$$\hat{g}_{10.000}(X) = 2,8463 \quad \text{bzw.} \quad \widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{10.000}(X)) = 0,00091261.$$

Beispiel (Fortsetzung)

Fazit: Die beiden Schätzungen für $\mathbb{E}[g(X)]$ sind sehr ähnlich. Die Verwendung von antithetischen Variablen bewirkt in diesem Beispiel jedoch nur eine geringe Varianzreduktion. Die Ursache hierfür ist, dass die Wahrscheinlichkeit an den beiden Enden des Trägers der Dichtefunktion $f_Y(y)$ sehr ähnlich sind. Aus diesem Grund sind Z_i und $Z_{5.000+i}$ für $i = 1, \dots, 5000$ paarweise nur schwach negativ korreliert.

Kontrollvariablen

Zur Schätzung von $\mathbb{E}[g(X)]$ wird eine **Hilfsfunktion** h betrachtet, für die der Erwartungswert $\mathbb{E}[h(X)]$ bekannt ist. Für stochastisch unabhängige und identisch-verteilte Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit der Verteilungsfunktion F_X und $c \in \mathbb{R}$ erhält man dann für $\mathbb{E}[g(X)]$ den Monte-Carlo-Schätzer

$$\widehat{g}_n^K(X) := c\mathbb{E}[h(X)] + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g(X_i) - ch(X_i)). \quad (35)$$

Dieser Schätzer ist **erwartungstreu**, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\widehat{g}_n^K(X)] &= c\mathbb{E}[h(X)] + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(g(X_i) - ch(X_i))] \\ &= c\mathbb{E}[h(X)] + (\mathbb{E}[g(X)] - c\mathbb{E}[h(X)]) \\ &= \mathbb{E}[g(X)] \end{aligned}$$

Für die Varianz von $\widehat{g}_n^K(X)$ erhält man:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{g}_n^K(X)) &= \text{Var}\left(c\mathbb{E}[h(X)] + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g(X_i) - ch(X_i))\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(g(X_i) - ch(X_i)) \\ &= \frac{1}{n} \left(\text{Var}(g(X)) - 2c\text{Cov}(g(X), h(X)) + c^2\text{Var}(h(X)) \right)\end{aligned}$$

Wird dieser Ausdruck für $\text{Var}(\hat{g}_n^K(X))$ nach c abgeleitet und die resultierende Ableitung anschließend gleich 0 gesetzt, erhält man:

$$\text{Cov}(g(X), h(X)) = c\text{Var}(h(X))$$

D.h. der Monte-Carlo-Schätzer $\hat{g}_n^K(X)$ besitzt die minimale Varianz, wenn für c der Wert

$$c = \frac{\text{Cov}(g(X), h(X))}{\text{Var}(h(X))}$$

gewählt wird. Die Varianz beträgt dann:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{g}_n^K(X)) &= \frac{1}{n} \left(\text{Var}(g(X)) - \frac{\text{Cov}^2(g(X), h(X))}{\text{Var}(h(X))} \right) \\ &= \frac{1}{n} \text{Var}(g(X)) \left(1 - \frac{\text{Cov}^2(g(X), h(X))}{\text{Var}(h(X)) \text{Var}(g(X))} \right) \\ &= \frac{1}{n} \text{Var}(g(X)) (1 - \text{Corr}^2(g(X), h(X)))\end{aligned}$$

D.h. der Monte-Carlo-Schätzer $\hat{g}_n^K(X)$ ist **umso präziser, desto stärker $g(X)$ und $h(X)$ (positiv oder negativ) korreliert sind.**

Es gilt:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{g}_n^K(X)) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(g(X_i) - ch(X_i)) \\ &= \frac{1}{n} \text{Var}(g(X) - ch(X))\end{aligned}\tag{36}$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.8 Varianzreduktion

Ferner ist die (korrigierte) Stichprobenvarianz

$$\widehat{\text{Var}}(g(X) - ch(X)) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(g(X_i) - ch(X_i) - (\widehat{g}_n(X) - \widehat{ch}_n(X)) \right)^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\text{Var}(g(X) - ch(X))$. Folglich ist durch

$$\widehat{\text{Var}}(\widehat{g}_n^K(X)) := \frac{\widehat{\text{Var}}(g(X) - ch(X))}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left(g(X_i) - ch(X_i) - (\widehat{g}_n(X) - \widehat{ch}_n(X)) \right)^2 \quad (37)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz des Monte-Carlo-Schätzers $\widehat{g}_n^K(X)$, d.h. für $\text{Var}(\widehat{g}_n^K(X))$, gegeben. Denn zusammen mit (36) folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\widehat{\text{Var}}(\widehat{g}_n^K(X)) \right] &= \frac{\mathbb{E}[\widehat{\text{Var}}(g(X) - ch(X))]}{n} \\ &= \frac{\text{Var}(g(X) - ch(X))}{n} = \text{Var}(\widehat{g}_n^K(X)) \end{aligned}$$

10. Monte-Carlo-Simulation

10.8 Varianzreduktion

Beispiel (Kontrollvariable)

Es wird wieder die Situation aus dem letzten Beispiel betrachtet. D.h. für die Schadenhöhe gilt $X \sim \text{Weibull}(0,5;5)$ und es wird angenommen, dass der gedeckte Höchstschaden $u = 8$ beträgt und ein Selbstbehalt von $d = 1$ existiert, so dass der Versicherer wieder am Erwartungswert und der Varianz der Zufallsvariablen

$$g(X) := \begin{cases} 0 & \text{für } X \leq 1 \\ X - 1 & \text{für } 1 < X < 8 \\ 7 & \text{für } X \geq 8 \end{cases}$$

interessiert ist. Zusätzlich wird nun eine Kontrollvariable $\tilde{Y} := h(X)$ mit der folgenden Verteilungsfunktion betrachtet:

$$F_{\tilde{Y}}(y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \\ 0,3606 & \text{für } y = 0 \\ 0,3606 + 0,0510y & \text{für } 0 < y < 7 \\ 1 & \text{für } y \geq 7 \end{cases} \quad (38)$$

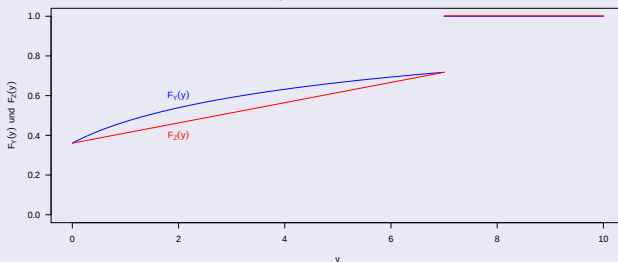
10. Monte-Carlo-Simulation

10.8 Varianzreduktion

Beispiel (Fortsetzung)

Diese Verteilungsfunktion unterscheidet sich von der Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ (vgl. (33)) nur dadurch, dass sie im Bereich $[0, 7]$ linear verläuft (siehe Abbildung). Da die Zufallsvariable $\tilde{Y}$ im Intervall $(0, 7)$ die konstante Dichte 0,0510 besitzt, erhält man für ihren Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tilde{Y}] &= 0,3606 \cdot 0 + \int_0^7 0,0510 y dy + 0,2823 \cdot 7 \\ &= \frac{0,0510}{2} y^2 \Big|_0^7 + 0,2823 \cdot 7 = 3,2260.\end{aligned}$$



Beispiel (Fortsetzung)

Auflösen der Gleichung $u = 0,3606 + 0,0510y$ für $0 < y < 7$ nach y liefert

$$y = \frac{u - 0,3606}{0,0510}.$$

Somit besitzt die Zufallsvariable

$$\tilde{Z} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq U \leq 0,3606 \\ \frac{U - 0,3606}{0,0510} & \text{für } 0,3606 < U < 0,7177 \\ 7 & \text{für } 0,7177 \leq U \leq 1 \end{cases} \quad (39)$$

für $U \sim U(0, 1)$ gemäß der Inversionsmethode (vgl. Abschnitt 10.4) die Verteilungsfunktion (38).

10. Monte-Carlo-Simulation

10.8 Varianzreduktion

Beispiel (Fortsetzung)

Erzeuge $n = 10.000$ unabhängige Pseudozufallszahlen $U_1, \dots, U_{10.000} \sim U(0, 1)$. In (34) und (39) eingesetzt, erhält man auf diese Weise die simulierten Beobachtungen $Z_1, \dots, Z_{10.000} \sim F_Y$ bzw. $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_{10.000} \sim F_{\tilde{Y}}$. Für den Monte-Carlo-Schätzer (40) erhält man für $c = 1$ die Darstellung

$$\hat{g}_n^K(X) = 3,2260 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \tilde{Z}_i). \quad (40)$$

Mit (40) und (37) (wieder mit $c = 1$) erhält man für $\mathbb{E}[g(X)]$ und $\text{Var}(\hat{g}_{10.000}^K(X))$ die Monte-Carlo-Schätzungen:

$$\hat{g}_{10.000}^K(X) = 2,8589 \quad \text{bzw.} \quad \widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{10.000}^K(X)) = 0,00003156$$

Fazit: Die Schätzung für $\mathbb{E}[g(X)]$ ist sehr ähnlich zur resultierenden Schätzung unter Verwendung von antithetischen Zufallsvariablen. Jedoch ist die Varianzreduktion nun erheblich. Die Varianz von $\hat{g}_{10.000}^K(X)$ beträgt lediglich ca. ein $\frac{1}{30}$ von der Varianz von $\hat{g}_{10.000}(X)$ (mit und ohne Verwendung von antithetischen Zufallsvariablen).

Abschnitt 10.9

Literatur

10. Monte-Carlo-Simulation

10.9 Literatur



BECKER, T., HERRMANN, R., SANDOR, V., SCHÄFER, D., WELLISCH, U. (2016). *Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden*. Springer.



HÄMMERLIN, G., HOFFMANN, K. H. (1989). *Numerische Mathematik*. Springer.



IRLE (2001). *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik: Grundlagen - Resultate - Anwendungen*. Vieweg+Teubner.



MARSAGLIA, G. (1968). *Random numbers fall mainly in the planes*. TProceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 61, 25–28.



MARSAGLIA, G., ZAMAN, A. (1991). *A new class of random number generators*. The Annals of Applied Probability, 1/3, 462–480.



MEINTRUP, D., SCHÄFFLER, S. (2005). *Stochastik: Theorie und Anwendungen*. Springer.

10. Monte-Carlo-Simulation

10.9 Literatur



METROPOLIS, N., STANISLAW, U. (1949). *The Monte Carlo method*. Journal of the American Statistical Association, 44/247, 335–341.



STOER, J. (1989). *Numerische Mathematik I*. Springer.