

Quantitatives Risikomanagement 2

SS 2026

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg

Lehrstuhl für BWL, insb. Mathematik und Statistik in den Wirtschaftswissenschaften



Kapitel 8

Multivariate Verteilungen

Abschnitt 8.1

Einleitung

8. Multivariate Verteilungen

8.1 Einleitung

Wie wir bereits gesehen haben, sind die meisten Modelle im quantitativen Risikomanagement **von Natur aus multivariat**. Zum Beispiel gilt:

- Der **Wert eines Finanztitels** zu einem bestimmten Zeitpunkt ist eine Funktion von mehreren Risikofaktoren (vgl. Abschnitt 2.7).
- Die **Rendite eines Portfolios von Finanztitel** ist abhängig von den Renditen der einzelnen Finanztitel im Portfolio (vgl. Abschnitt 2.7).
- Das benötigte **Risikokapital für einen Geschäftsbereich** ist abhängig von den Risiken in allen Geschäftsbereichen (vgl. Abschnitt 3.2).
- Die **Gesamtschadenhöhe in einem Versicherungsportfolio** ist abhängig von den Einzelschadenhöhen und der Schadenanzahl (vgl. Abschnitt 4.1).
- usw.

Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, ist es jedoch nicht ausreichend einzelne Risiken/Zufallsvariablen isoliert voneinander zu betrachten, sondern die vorhandenen Risiken/Zufallsvariablen müssen **simultan** betrachtet und ausgewertet werden. Nur so können vorhandene Abhängigkeiten und Korrelationen zwischen den einzelnen Risiken/Zufallsvariablen erfasst und berücksichtigt werden.

8. Multivariate Verteilungen

8.1 Einleitung

Zum Beispiel ist es bei der Analyse der Rendite eines Wertpapierportfolios, das aus mehreren Finanztiteln besteht, nicht ausreichend, nur die univariaten Verteilungen der Renditen der einzelnen Finanztitel zu betrachten. Für eine sinnvolle Analyse müssen bei der stochastischen Modellierung der Rendite des Wertpapierportfolios auch die vorhandenen **Abhängigkeiten** und **Korrelationen** zwischen den Renditen der verschiedenen Wertpapiere berücksichtigt werden (siehe nächstes Beispiel). Diese Abhängigkeiten und Korrelationen werden jedoch nicht durch die univariaten Verteilungen der Renditen der einzelnen Finanztitel erfasst, sondern erst durch die gemeinsame **multivariate Verteilung** aller Renditen.

D.h. anstelle einzelne Risiken/Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ zu betrachten und ihre Verteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_n$ isoliert voneinander auszuwerten, werde die Risiken/Zufallsvariablen zu einem **n -dimensionalen Zufallsvektor (multivariaten Zufallsvariablen)**

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$$

auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ zusammengefasst und die (**gemeinsame**) **Verteilungsfunktion**

$$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1], \mathbf{x} \mapsto F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

untersucht.

8. Multivariate Verteilungen

8.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden daher mit

- 1) der multivariaten Normalverteilung,
- 2) der Varianz-gemischten multivariaten Normalverteilung,
- 3) der multivariaten t -Verteilung,
- 4) den sphärischen Verteilungen und
- 5) den elliptischen Verteilungen



die wichtigsten multivariaten Verteilungen vorgestellt. Dabei handelt es sich um absolutstetige Verteilungen auf der Menge

$$\mathbb{R}^n.$$

D.h. die univariaten Randverteilungen dieser multivariaten Verteilungen besitzen auf der kompletten reellen Zahlenachse $\mathbb{R}$ eine positive Wahrscheinlichkeitsdichte. Diese multivariaten Verteilungen sind daher natürliche Kandidaten z.B. zur simultanen stochastischen Modellierung der Renditen mehrerer Finanztitel in einem Wertpapierportfolio.

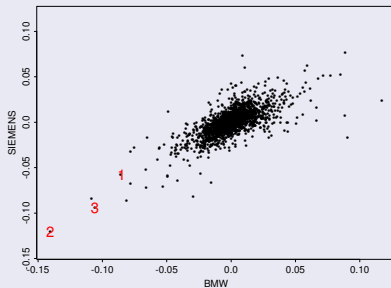
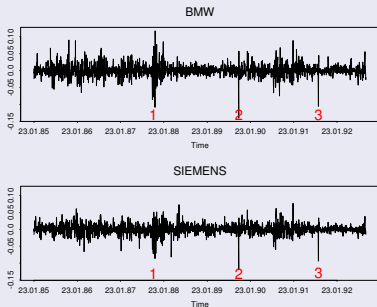
Eine umfassende Darstellung multivariater absolutstetiger Verteilungen ist z.B. in der Standardreferenz KOTZ ET AL. (2000) zu finden

8. Multivariate Verteilungen

8.1 Einleitung

Beispiel (Tagesrenditen der BMW- und Siemens-Aktie (1))

Die folgende Abbildung zeigt ein Streudiagramm mit den Tagesrenditen der BMW- und der Siemens-Aktie für den Zeitraum von 01.01.1985 bis 31.12.1992. Es ist zu erkennen, dass hohe bzw. niedrige Tagesrenditen tendenziell simultan auftreten und deshalb gewisse Abhängigkeiten zwischen den Tagesrenditen der beiden Aktien existieren, die bei einer stochastischen Modellierung der Rendite des Wertportfolios bestehend aus diesen beiden Aktien berücksichtigt werden sollten.



8. Multivariate Verteilungen

8.1 Einleitung

Beispiel (Fortsetzung)

Zum Beispiel haben die extremen Tagesrenditen 1 (19.10.1987), 2 (16.10.1989) und 3 (19.08.1991) bei den beiden Aktien die gleichen Ursachen:



19.10.1987 Black Monday: Die vorhandene Unsicherheit auf den Devisenmärkten, ein Vertrauensverlust in den US-Dollar und der automatisierte Handel, der den vorhandenen Verkaufsdruck weiter verstärkte und somit einen Kaskadeneffekt begünstigte, führte zu einem Kursverlust beim Dow Jones von ca. 23% und beim Dax von ca. 9%.



16.10.1989: Die vorhandene Marktunsicherheit wegen einer zu hohen Verschuldung bei vielen großen US-amerikanischen Unternehmen führte beim Dow Jones und Dax zu einem Kurssturz von ca. 7% bzw. ca. 13% als erste Nachrichten über Finanzierungsschwierigkeiten bei der geplanten Übernahme von United Airlines durch seine Mitarbeiter publik wurden.



19.08.1991: In Reaktion auf den später gescheiterten Putschversuch gegen den damaligen sowjetischen Präsidenten Michail Gorbatschow kam es beim Dow Jones zu einem Kursverlust von ca. 2% und beim Dax von ca. 9%.

Abschnitt 8.2

Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Analog zu einer (univariaten) Zufallsvariablen ist die Verteilung eines **n -dimensionalen Zufallsvektors** $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ durch seine (**gemeinsame**) **Verteilungsfunktion**

$$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1], \mathbf{x} \mapsto F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

vollständig festgelegt.

Der Wert $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$ gibt die **Wahrscheinlichkeit** an, dass **simultan** X_1 Werte kleiner oder gleich x_1 , X_2 Werte kleiner oder gleich x_2 , X_3 Werte kleiner oder gleich x_3 usw. annimmt. Häufig schreibt man einfach kurz:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Eine multivariate Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ besitzt analoge **Eigenschaften** wie eine univariate Verteilungsfunktion:

- a) $\lim_{x_j \rightarrow -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ und $\lim_{x_j \rightarrow \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = 1$ für $j = 1, \dots, n$
- b) $F_{\mathbf{X}}$ ist **monoton wachsend**, d.h. $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1) \leq F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_2)$ für alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{x}_2$ (d.h. $x_{1j} \leq x_{2j}$ für $j = 1, \dots, n$)
- c) $F_{\mathbf{X}}$ ist **rechtsstetig**, d.h. $\lim_{\mathbf{x} \downarrow \mathbf{x}_0} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0)$ für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Mit dem **Differenzenoperator**

$$\Delta_{\alpha_j, \beta_j} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{j-1}, \beta_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

gilt ferner:

$$\text{d) } \Delta_{\alpha_1, \beta_1} \Delta_{\alpha_2, \beta_2} \cdots \Delta_{\alpha_n, \beta_n} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ für alle } \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R} \text{ mit } \alpha_j \leq \beta_j \text{ für } j = 1, \dots, n$$

Durch die Eigenschaft d) wird

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{X} \leq \boldsymbol{\beta}) \geq 0$$

für alle $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{\beta}$ sichergestellt.

Analog zum univariaten Fall wird

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := \mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

als **(multivariate) Survival-Funktion** oder **Tail-Funktion** bezeichnet.

Beachte: Im Gegensatz zum univariaten Fall gilt jedoch für $n \geq 2$ im Allgemeinen:

$$\bar{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{x}) \neq 1 - \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = 1 - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$$

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Als **Randverteilungsfunktionen** des Zufallsvektors $\mathbf{X}$ werden die Verteilungsfunktionen F_{X_i} der univariaten Zufallsvariablen X_i bezeichnet. Sie lassen sich leicht aus der (gemeinsamen) Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ berechnen. Denn für $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$F_{X_i}(x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq x_i) = F_{\mathbf{X}}(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty)$$

Analog lassen sich **k -dimensionale Randverteilungen** für $2 \leq k \leq n - 1$ definieren. Hierzu sein oBdA angenommen, dass der Zufallsvektor $\mathbf{X}$ in zwei Teile $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ mit

$$\mathbf{X}_1 := (X_1, \dots, X_k)^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{X}_2 := (X_{k+1}, \dots, X_n)^T \quad (1)$$

zerlegt sei. Dann sind die k -dimensionale Randverteilungsfunktion von $\mathbf{X}_1$ und die $(n - k)$ -dimensionale Randverteilungsfunktion von $\mathbf{X}_2$ gegeben durch

$$F_{\mathbf{X}_1} = \mathbb{P}(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{x}) = F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k, \infty, \dots, \infty) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$$

bzw.

$$F_{\mathbf{X}_2} = \mathbb{P}(\mathbf{X}_2 \leq \mathbf{x}) = F_{\mathbf{X}}(\infty, \dots, \infty, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Völlig analog lassen sich k -dimensionale Randverteilungen für andere Zerlegungen von $\mathbf{X}$ definieren.

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ und die Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ werden als **absolutstetig** bezeichnet, wenn es eine **nichtnegative Funktion**

$$f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+, \mathbf{x} \mapsto f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

gibt, so dass

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(u_1, \dots, u_n) du_1 \cdots du_n$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Die Funktion (2) wird dann **(gemeinsame) Dichtefunktion** von $\mathbf{X}$ bzw. $F_{\mathbf{X}}$ genannt und die Dichtefunktionen $f_{\mathbf{X}_1}$ und $f_{\mathbf{X}_2}$ von $\mathbf{X}_1$ bzw. $\mathbf{X}_2$ werden entsprechend als **k-dimensionale** bzw. **n – k-dimensionale Randdichtefunktion** bezeichnet.

Falls die absolutstetige Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ bekannt ist, kann die Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}$ durch partielles Ableiten bestimmt werden:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

Im Folgenden wird stets angenommen, dass $\mathbf{X}$ und $F_{\mathbf{X}}$ absolutstetig sind, da dies im quantitativen Risikomanagement den **Regelfall** darstellt und die allermeisten Anwendungsfälle multivariater Verteilungen abdeckt.

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Beachte: Wenn die (gemeinsame) Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ oder die (gemeinsame) Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}$ gegeben ist, sind auch alle Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ und alle Randdichtefunktionen $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ sowie die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ eindeutig festgelegt. **Die Umkehrung gilt jedoch nicht**, da durch die Kenntnis von $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ bzw. $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ i.A. die stochastischen Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Zufallsvariablen noch nicht festgelegt sind (vgl. hierzu auch Kapitel 9).

Im Folgenden wird wieder die Zerlegung (1) des Zufallsvektors $\mathbf{X}$ in die beiden k - bzw. $(n-k)$ -dimensionalen Zufallsvektoren $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ betrachtet. Die **bedingte Verteilung von $\mathbf{X}_2$, gegeben $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1$** , besitzt dann die Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1)} \quad (3)$$

für $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^k$ mit $f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) > 0$ und $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$ und die korrespondierende **bedingte Verteilungsfunktion** lautet:

$$F_{\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = \int_{-\infty}^{x_{k+1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_k, u_{k+1}, \dots, u_n)}{f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1)} du_{k+1} \cdots du_n \quad (4)$$

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Bei (3) und (4) handelt es sich um die Dichte- bzw. Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $\mathbf{X}_2$ unter der Bedingung, dass der Zufallsvektor $\mathbf{X}_1$ den Wert $\mathbf{x}_1$ annimmt. gilt. Völlig analog lassen sich bedingte Verteilungen für andere Zerlegungen von $\mathbf{X}$ definieren.

Gilt für die gemeinsame Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1)f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2) \quad \text{für alle } \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^k \text{ und } \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-k},$$

d.h. lässt sich die gemeinsame Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ als Produkt der Randdichtefunktionen $f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1)$ und $f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2)$ darstellen, vereinfacht sich die bedingte Dichtefunktion (3) zu

$$f_{\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1) = f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2).$$

D.h. $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ sind dann **stochastisch unabhängig** und es gilt damit insbesondere

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = F_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1)F_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2) \quad \text{für alle } \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^k \text{ und } \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Allgemein gilt, dass die n Komponenten des absolutstetigen Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ genau dann **stochastisch unabhängig** sind, wenn

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) \quad \text{und} \quad f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

 (5)

gilt.

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Die Existenz der benötigten Momente vorausgesetzt, sind der **Erwartungsvektor** und die **Varianz-Kovarianzmatrix** eines Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ gegeben durch

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] := \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n] \end{pmatrix} \quad (6)$$

bzw.

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) := \mathbb{E} \left[(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - \mathbb{E}[\mathbf{X}])^T \right] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

mit

$$\sigma_i^2 := \text{Var}(X_i) \quad \text{und} \quad \sigma_{ij} := \text{Cov}(X_i, X_j) \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n. \quad (8)$$

D.h. auf der **Hauptdiagonalen** von $\text{Cov}(\mathbf{X})$ stehen die Varianzen der einzelnen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ und außerhalb der Hauptdiagonalen stehen die paarweisen Kovarianzen zwischen den einzelnen Zufallsvariablen.

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Die **Korrelationsmatrix** von $\mathbf{X}$ ist dann gegeben durch

$$\text{Corr}(\mathbf{X}) := \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

mit

$$\rho_{ij} := \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var}(X_i)\text{Var}(X_j)}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n \text{ mit } i \neq j. \quad (10)$$

Im Falle eines **standardisierten Zufallsvektors** $\mathbf{X}$, d.h. $\text{Var}(X_i) = 1$ für $i = 1, \dots, n$, gilt die Identität:

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \text{Corr}(\mathbf{X})$$

Für Erwartungswertvektoren und Varianz-Kovarianzmatrizen und beliebige Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ und Vektoren $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ gelten die beiden folgenden **Rechenregeln**:

$$\mathbb{E}[\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}] = \mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{X}] + \mathbf{b} \quad (11)$$

$$\text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}\text{Cov}(\mathbf{X})\mathbf{A}^T \quad (12)$$

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Aufgrund der Symmetrie der Kovarianz sind Varianz-Kovarianzmatrizen (und damit auch Korrelationsmatrizen) offensichtlich stets **symmetrische Matrizen**. Mit Hilfe von (12) kann man ferner leicht zeigen, dass Varianz-Kovarianzmatrizen (und damit auch Korrelationsmatrizen) stets **positiv semi-definit** sind. Denn für einen beliebigen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mathbf{a} \text{Cov}(\mathbf{X}) \mathbf{a}^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \text{Cov}(X_i, X_j) a_j = \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i \right) = \text{Var}(\mathbf{a}^T \mathbf{X}) \geq 0$$

Gilt sogar

$$\mathbf{a} \text{Cov}(\mathbf{X}) \mathbf{a}^T > 0$$

für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt, dann ist die Varianz-Kovarianzmatrix $\text{Cov}(\mathbf{X})$ **positiv definit** und damit insbesondere auch **invertierbar**. In diesem Fall kann mit der nach dem französischen Mathematiker A.-L. CHOLESKY (1875–1918) benannten **Cholesky-Zerlegung** die Varianz-Kovarianzmatrix eindeutig in der Form

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \mathbf{C}^T$$

dargestellt werden, wobei der sog. **Cholesky-Faktor** $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine **untere Dreiecksmatrix** mit ausschließlich positiven Einträgen auf der Hauptdiagonalen ist.



8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Es sei nun angenommen, dass es sich bei

$$\mathbf{X}_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n})^T, \dots, \mathbf{X}_m = (X_{m1}, \dots, X_{mn})^T$$

um **identisch-verteilte** und **stochastisch unabhängige** (oder zumindest **unkorrelierte**) **Beobachtungen** mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$, Varianz-Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ und Korrelationsmatrix $\mathbf{P}$ handelt.

Durch den **Mittelwertvektor**

$$\bar{\mathbf{X}} := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{X}_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_{j1} \\ \vdots \\ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} \quad (13)$$

und die **(unkorrigierte) empirische Varianz-Kovarianzmatrix**

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &:= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (X_{j1} - \bar{X}_1)^2 & \dots & \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (X_{j1} - \bar{X}_1)(X_{jn} - \bar{X}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (X_{jn} - \bar{X}_n)(X_{j1} - \bar{X}_1) & \dots & \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (X_{jn} - \bar{X}_n)^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

sind die **Standardschätzer** für $\boldsymbol{\mu}$ bzw. $\boldsymbol{\Sigma}$ gegeben.

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Es gilt

$$\mathbb{E}[\bar{\mathbf{X}}] = \boldsymbol{\mu} \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[\mathbf{S}] = \frac{m-1}{m} \boldsymbol{\Sigma}.$$

D.h. (13) ist ein **erwartungstreuer Schätzer** für $\boldsymbol{\mu}$ und (14) ein **asymptotisch erwartungstreuer Schätzer** für $\boldsymbol{\Sigma}$. Einen **erwartungstreuer Schätzer** für $\boldsymbol{\Sigma}$ erhält man mit der **(korrigierten) Stichproben-Varianz-Kovarianzmatrix**

$$\tilde{\mathbf{S}} := \frac{m}{m-1} \mathbf{S}.$$

Aus der Stichproben-Varianz-Kovarianzmatrix $\mathbf{S} = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ lässt sich leicht eine **Stichproben-Korrelationsmatrix**

$$\mathbf{R} = (r_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

mit

$$r_{ij} := \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n$$

berechnen.

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Bemerkung: Die weiteren Eigenschaften der Schätzer

$$\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{S} \text{ (bzw. } \tilde{\mathbf{S}}) \quad \text{und} \quad \mathbf{R}$$

hängen vor allem von der tatsächlichen multivariaten Verteilung der Beobachtungen $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ ab. Sie sind daher nicht immer gute Schätzer für $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$ bzw. $\mathbf{P}$. Sind die Beobachtungen jedoch **stochastisch unabhängig und identisch multivariat normalverteilt**, dann handelt es sich bei $\bar{\mathbf{X}}$ und $\mathbf{S}$ um die **Maximum-Likelihood-Schätzer** für $\boldsymbol{\mu}$ bzw. $\boldsymbol{\Sigma}$, so dass sie dann eine Reihe weiterer guter Eigenschaften aufweisen. Falls aber die multivariate Normalverteilung für die Beobachtungen $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ keine geeignete Verteilungsannahme ist, liefern bzgl. **Effizienz** (d.h. erwarteter Schätzfehler) und **Robustheit** (d.h. Sensitivität bzgl. Ausreißern in den Daten) andere Schätzer für $\boldsymbol{\mu}$ bzw. $\boldsymbol{\Sigma}$ häufig bessere Schätzergebnisse.

Der folgende **Transformationssatz für multivariate Dichtefunktionen** ist die Verallgemeinerung des Transformationssatzes für univariate Dichtefunktionen (vgl. Abschnitt 4.14) auf mehrdimensionale absolutstetige Zufallsvariablen.

Zu seiner Formulierung wird für eine differenzierbare Funktion

$$h = (h_1, \dots, h_n) : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_n(\mathbf{x}))$$

deren **Jacobi-Matrix an der Stelle $\mathbf{x} \in E$** benötigt:

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

$$\mathbf{J}_h(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Satz (Transformationssatz für multivariate Dichtefunktionen)

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Zufallsvektor mit dem Bild $E := \mathbf{X}(\Omega)$ und der Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}$. Ferner sei $h : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stückweise stetig differenzierbare und injektive Funktion mit $\det(\mathbf{J}_h(\mathbf{x})) \neq 0$ für $\mathbf{x} \in E$. Dann besitzt $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X})$ die Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} f_{\mathbf{X}}(g(\mathbf{y})) |\det(\mathbf{J}_g(\mathbf{y}))| & \text{für } \mathbf{y} \in h(E) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (15)$$

wobei $g(\mathbf{y}) := h^{-1}(\mathbf{y})$ für $\mathbf{y} \in h(E)$ gilt.

Beweis: Siehe z.B. TAPPE (2013), Seite 188.

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Beispiel (Mehrdimensionaler Transformationssatz für Dichtefunktionen)

Es seien $X_1, X_2 \sim N(0, 1)$ zwei stochastisch unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Dann besitzt die zweidimensionale Zufallsvariable

$$\mathbf{Y} := h(\mathbf{X}) = (X_1 + X_2, X_1 - X_2)^T$$

die Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{Y}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{y} \mapsto f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{4}}. \quad (16)$$

D.h. die Zufallsvariablen Y_1, Y_2 sind ebenfalls stochastisch unabhängig und jeweils $N(0, 2)$ -verteilt. Denn die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{x} \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2)^T$$

ist stetig differenzierbar und injektiv mit

$$\det(\mathbf{J}_h(\mathbf{x})) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Beispiel (Fortsetzung)

Ferner erhält man für h durch Auflösen des linearen Gleichungssystems

$$y_1 = x_1 + x_2$$

$$y_2 = x_1 - x_2$$

nach x_1 und x_2 die Umkehrfunktion

$$g(\mathbf{y}) = h^{-1}(\mathbf{y}) = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right)^T.$$

Die Determinante der Jakobi-Matrix von g ist somit gegeben durch

$$\det(\mathbf{J}_g(\mathbf{y})) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \quad \text{für } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2.$$

Durch Einsetzen in (15) und unter Berücksichtigung der stochastischen Unabhängigkeit von X_1, X_2 erhält man die Dichtefunktion (16):

8. Multivariate Verteilungen

8.2 Wiederholung: Mathematische Grundlagen multivariater Verteilungen

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) &= f_{\mathbf{X}}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2}\right) \left| -\frac{1}{2} \right| \\&= f_{X_1}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) f_{X_2}\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right) \frac{1}{2} \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2} \frac{1}{2} \\&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{4}}\end{aligned}$$

Abschnitt 8.3

Multivariate Normalverteilung

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Zur Modellierung von Renditen oder Risikofaktoren wird häufig die **multivariate Normalverteilung** verwendet:

Definition (Multivariate Normalverteilung)

Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ mit der Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+, \mathbf{x} \mapsto f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right) \quad (17)$$

mit $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ und einer positiv definiten $(n \times n)$ -Matrix Σ wird als multivariat normalverteilt bezeichnet (kurz: $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$). Im Falle von $N(\mathbf{0}, \mathbf{E})$ sagt man, dass $\mathbf{X}$ standardnormalverteilt ist.

Analog zu einer univariaten Normalverteilung ist auch eine multivariate Normalverteilung durch seine beiden Parameter $\boldsymbol{\mu}$ und Σ **eindeutig festgelegt** und wie man leicht zeigen kann, gilt

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{X}] \quad \text{und} \quad \text{Cov}(\mathbf{X}) = \Sigma. \quad (18)$$

D.h. die beiden Parameter $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stimmen mit dem **Erwartungswertvektor** $\mathbb{E}[\mathbf{X}]$ bzw. der **Varianz-Kovarianzmatrix** $\text{Cov}(\mathbf{X})$ überein.

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Bemerkung: Ist die Varianz-Kovarianzmatrix Σ nur **positiv semidefinit**, dann existiert Σ^{-1} nicht und man spricht von einer **singulären multivariaten Normalverteilung**. Dabei handelt es sich um eine multivariate Normalverteilung auf einem linearen Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Die **charakteristische Funktion** eines Zufallsvektors $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ ist gegeben durch

$$C_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[\exp(i\mathbf{t}^T \mathbf{X})] = \exp\left(i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}\right) \quad \text{für alle } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n. \quad (19)$$

Aus der Form der Dichtefunktion (17) ist ersichtlich, dass $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit dem gleichen Dichtewert $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ auf **Ellipsoiden mit Mittelpunkt $\boldsymbol{\mu}$** liegen, die durch Gleichungen der Form

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c$$

für Konstanten $c > 0$ festgelegt werden. Im Falle einer bivariaten Normalverteilung sind die Isohöhenlinien **Ellipsen** (siehe nächstes Beispiel).

Im Allgemeinen wird eine multivariate Verteilung, deren Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}$ nur durch eine **quadratische Form**

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

von $\mathbf{x}$ abhängt, als **elliptische Verteilung** bezeichnet (siehe hierzu Abschnitt 8.5).

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Bivariate Normalverteilung)

Für einen bivariat normalverteilten Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ gilt

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

(vgl. (7) und (10)). Für $|\rho_{12}| < 1$ (d.h. X_1 und X_2 sind nicht perfekt linear abhängig) erhält man

$$\det(\boldsymbol{\Sigma}) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho_{12}^2\sigma_1^2\sigma_2^2 > 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho_{12}^2)} & -\frac{\rho_{12}}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho_{12}^2)} \\ -\frac{\rho_{12}}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho_{12}^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho_{12}^2)} \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in (17) liefert dies nach ein paar Umformungen die bivariate Dichte

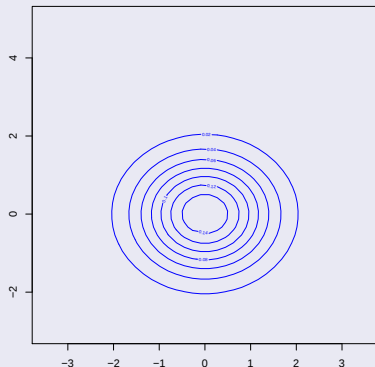
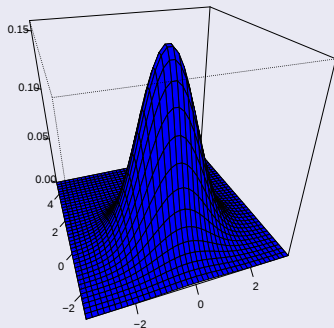
$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{12} \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right]\right). \quad (20)$$

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Die untenstehende Abbildung zeigt die Dichte einer bivariaten Standardnormalverteilung, d.h. mit $\mu = (0,0)^T$ und $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



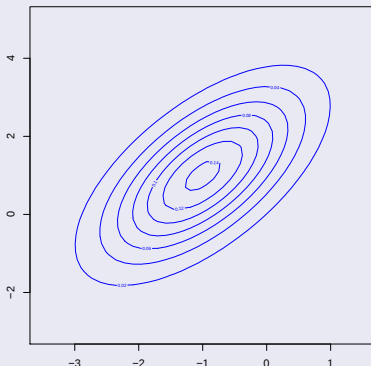
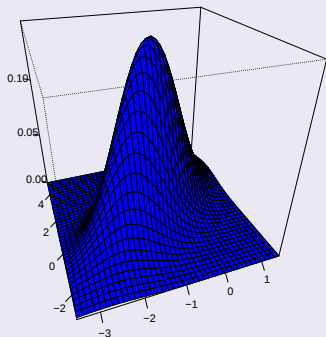
8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Die untenstehende Abbildung zeigt die Dichte einer bivariaten Normalverteilung mit

$$\mu = (-1, 1)^T \text{ und } \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 \\ 0,9 & 2 \end{pmatrix}.$$



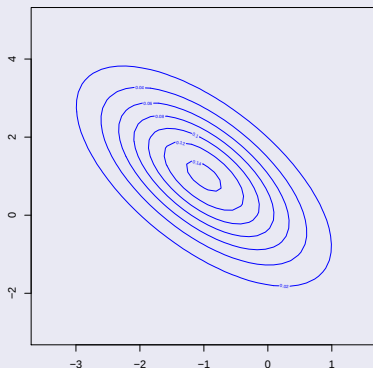
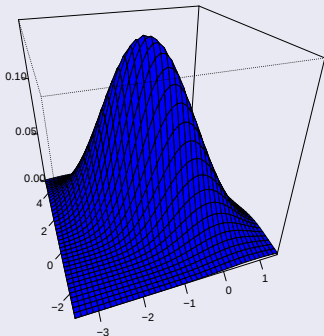
8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Die untenstehende Abbildung zeigt die Dichte einer bivariaten Normalverteilung mit

$$\mu = (-1, 1)^T \text{ und } \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -0,9 \\ -0,9 & 2 \end{pmatrix}.$$



8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Der folgende Satz besagt, dass die Komponenten eines multivariat normalverteilten Zufallsvektors genau dann **stochastisch unabhängig** sind, wenn sie paarweise unkorreliert sind:

Satz (Äquivalenz von Unkorreliertheit und stochastischer Unabhängigkeit)

Die Komponenten eines $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ -verteilten Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn $\boldsymbol{\Sigma}$ eine Diagonalmatrix ist, also wenn die Komponenten $X_1, \dots, X_n$ paarweise unkorreliert sind.

Beweis: Es ist bekannt, dass ganz allgemein aus der stochastischen Unabhängigkeit von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ auch deren Unkorreliertheit folgt. Dass für Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit $(X_1, \dots, X_n)^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ auch die Umkehrung dieser Aussage gilt, siehe Übungsaufgaben. ■

Das folgende Beispiel zeigt, dass normalverteilte Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ zusammen als Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ betrachtet, **nicht multivariat normalverteilt** sein müssen.

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Univariate vs. multivariate Normalverteilung)

Betrachtet wird der bivariate Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ mit der Dichte

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) & \text{falls } x_1 x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (21)$$

Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad \text{und} \quad f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \geq 0 \quad \text{für alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

handelt es sich bei $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ tatsächlich um eine Dichtefunktion. Es ist aber offensichtlich nicht die Dichte einer bivariaten Normalverteilung (vgl. (21) mit (20)).

Die Integration der Dichtefunktion (21) über x_2 liefert jedoch für X_1 die folgende Randdichtefunktion:

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) dx_2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) dx_2 & \text{für } x_1 \leq 0 \\ \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) dx_2 & \text{für } x_1 > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right) dx_2 & \text{für } x_1 \leq 0 \\ \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right) dx_2 & \text{für } x_1 > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} & \text{für } x_1 \leq 0 \\ \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} & \text{für } x_1 > 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Dabei wurde für die vorletzte Gleichung $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 1$ verwendet.

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Fortsetzung)

D.h. X_1 ist standardnormalverteilt. Auf die gleiche Weise zeigt man, dass auch X_2 standardnormalverteilt ist. D.h. X_1 und X_2 sind einzeln betrachtet jeweils standardnormalverteilt, obwohl der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ nicht bivariat normalverteilt ist.

Bemerkung: Paarweise unkorrelierte normalverteilte Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ müssen nicht stochastisch unabhängig sein, wenn ihre Zusammenfassung zu einem Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ nicht multivariat normalverteilt ist.

Der folgende Satz liefert eine einfache **Charakterisierung** von multivariaten Normalverteilungen:

Satz (Charakterisierung multivariater Normalverteilungen)

Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ ist genau dann $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ -verteilt, wenn für alle $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Zufallsvariable $\mathbf{a}^T \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ univariat $N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2)$ -verteilt ist mit den Parametern

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a} > 0.$$

Beweis: Siehe z.B. BROCKWELL-DAVIS (1991), Seite 36.

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Das folgende Resultat besagt, dass eine **affin-lineare Transformation** eines multivariat normalverteilten Zufallsvektors wieder (univariat oder multivariat) normalverteilt ist:

Satz (Affin-lineare Transformation multivariat normalverteilter Zufallsvektoren)

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ -verteilter Zufallsvektor, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{A}$ eine $(m \times n)$ -Matrix vom Rang $m \leq n$. Dann gilt

$$\mathbf{AX} + \mathbf{b} \sim N(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T).$$

Beweis: Siehe z.B. MITTELHAMMER (1996), Seite 206. ■

Diese Eigenschaft der multivariaten Normalverteilung besitzt sehr viele Anwendungen. Zum Beispiel wird sie bei der **Delta-Normal-Methode** gleich mehrfach verwendet (vgl. Abschnitt 2.7). Ein weiteres wichtiges Beispiel ist das nach dem US-amerikanischen Wirtschaftsnobelpreisträger HARRY MARKOWITZ (*1927) benannte **Markowitz-Modell** zur Portfoliooptimierung:



8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Markowitz-Modell)

Die Tagesrenditen von n risikobehafteten Anlagen werden durch den Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ stochastisch modelliert. D.h. die erwarteten Tagesrenditen der n Anlagen sind durch den Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ und die Varianzen und Kovarianzen der Tagesrenditen der n Anlagen durch die Varianz-Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ gegeben. Ist nun $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein Vektor von Portfoliogewichten, dann ist die Tagesrendite des Gesamtportfolios univariat normalverteilt und gegeben durch

$$\mathbf{w}^T \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n w_i X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

mit

$$\mu = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}.$$

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Mit Hilfe des letzten Satzes erhält man leicht, dass sämtliche **Randverteilungen** einer multivariaten Normalverteilung ebenfalls Normalverteilungen sind:

Folgerung (Randverteilungen einer multivariaten Normalverteilung)

Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ sei $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ -verteilt. Ferner sei $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^T$ eine beliebige Zerlegung von $\mathbf{X}$ in einen p - und einen $(n - p)$ -dimensionalen Zufallsvektor $\mathbf{X}_1$ bzw. $\mathbf{X}_2$, so dass $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)^T$ und

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$$

gilt. Für die Randverteilungen von $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ gilt dann

$$\mathbf{X}_1 \sim N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{X}_2 \sim N(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22}).$$

Beweis: Siehe z.B. MITTELHAMMER (1996), Seite 207. ■

Dies bedeutet insbesondere, dass alle Komponenten eines multivariat normalverteilten Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ **univariat normalverteilt** sind. Die Umkehrung dieser Aussage gilt aber i.A. nicht (siehe vorletztes Beispiel). Sind die Zufallsvariablen jedoch zusätzlich stochastisch unabhängig, dann gilt wegen (5) auch die Umkehrung.

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Der folgende Satz besagt, dass bei einer multivariaten Normalverteilung auch alle **bedingten Verteilungen** wieder (multivariate) Normalverteilungen sind:

Satz (Bedingte Verteilungen einer multivariaten Normalverteilung)

Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ sei $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ -verteilt. Ferner sei $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^T$ eine beliebige Zerlegung von $\mathbf{X}$ in einen p - und einen $(n-p)$ -dimensionalen Zufallsvektor $\mathbf{X}_1$ bzw. $\mathbf{X}_2$, so dass $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)^T$ und

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$$

gilt. Dann ist die Verteilungsfunktion von $\mathbf{X}_1$, bedingt gegeben $\mathbf{X}_2$, wieder eine multivariate Normalverteilung mit dem bedingten Erwartungswertvektor

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2] = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$$

und der bedingten Varianz-Kovarianzmatrix

$$\text{Cov}(\mathbf{X}_1 | \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{21}.$$

Beweis: Siehe z.B. FAHRMEIR ET AL. (1996), Seite 27.

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Bedingte Verteilung einer bivariaten Normalverteilung)

Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ sei bivariat normalverteilt. Dann ist die Dichte von X_1 , bedingt gegeben X_2 , durch

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

gegeben (vgl. (3)). D.h. $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ erhält man durch Division der gemeinsamen Dichte

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)} \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{12} \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right] \right) \quad (22)$$

(vgl. (20)) durch die Randdichte

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right).$$

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Nach kurzer Rechnung erhält man:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho_{12}^2)}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(x_1 - \mu_1 - \rho_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)\right)^2}{\sigma_1^2(1-\rho_{12}^2)}\right) \quad (23)$$

Für den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz von X_1 , bedingt gegeben $X_2 = x_2$, gilt somit

$$\mathbb{E}[X_1|X_2 = x_2] = \mu_1 + \rho_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$$

und

$$\text{Var}(X_1|X_2 = x_2) = \sigma_1^2(1 - \rho_{12}^2).$$

Aus (22) und (23) ist ersichtlich, dass die Zufallsvariablen X_1 und X_2 eines bivariat normalverteilten Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ genau dann stochastisch unabhängig sind, wenn $\rho_{12} = 0$ gilt. D.h. wenn X_1 und X_2 unkorreliert sind.

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Es gilt dann

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

und

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right) = f_{X_1}(x_1).$$

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Mit Hilfe der charakteristischen Funktion der multivariaten Normalverteilung (19) lässt sich leicht zeigen, dass die multivariate Normalverteilung analog zur univariaten Normalverteilung **reproduktiv** ist. D.h. die Summe zweier stochastisch unabhängiger multivariat normalverteilter Zufallsvektoren ist ebenfalls wieder multivariat normalverteilt. Genauer gilt:

Satz (Reproduktivität der multivariaten Normalverteilung)

Die beiden n -dimensionalen Zufallsvektoren $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ seien stochastisch unabhängig und $N(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ - bzw. $N(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ -verteilt. Dann gilt $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)$.

Beweis: Mit den charakteristischen Funktionen $C_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left(it^T \boldsymbol{\mu}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{t}\right)$ und $C_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = \exp\left(it^T \boldsymbol{\mu}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma}_2 \mathbf{t}\right)$ von $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{Y}$ erhält man aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ für die charakteristische Funktion von $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) &= C_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) C_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) \\ &= \exp\left(it^T \boldsymbol{\mu}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{t}\right) \exp\left(it^T \boldsymbol{\mu}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma}_2 \mathbf{t}\right) \\ &= \exp\left(it^T (\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2) - \frac{1}{2} \mathbf{t}^T (\boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2) \mathbf{t}\right) \quad \text{für alle } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Da dies jedoch die charakteristische Funktion eines $N(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)$ -verteilten Zufallsvektors ist, folgt aus der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion, dass $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)$ gilt.

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Der zentrale Grenzwertsatz für univariate Zufallsvariablen lässt sich auch auf Zufallsvektoren verallgemeinern. Dieses Ergebnis wird als **multivariater zentraler Grenzwertsatz** bezeichnet:

Satz (Multivariater zentraler Grenzwertsatz)

Die Zufallsvektoren $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ seien stochastisch unabhängig und identisch-verteilt mit $\mathbb{E}[\mathbf{X}_i] = \boldsymbol{\mu}$ und $\text{Cov}(\mathbf{X}_i) = \boldsymbol{\Sigma}$ für $i = 1, \dots, m$. Dann ist der standardisierte Summenvektor

$$\text{Cov} \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i \right)^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i - \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i \right] \right) = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}}{\sqrt{m}} \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i - m\boldsymbol{\mu} \right)$$

für große m näherungsweise multivariat standardnormalverteilt. Genauer gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}}{\sqrt{m}} \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i - m\boldsymbol{\mu} \right) \leq \mathbf{z} \right) = \Phi_n(\mathbf{z}) \quad \text{für alle } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist Φ_n die Verteilungsfunktion der n -dimensionalen Standardnormalverteilung und $\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}$ die Wurzel der Matrix $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ (d.h. es gilt $\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$).

Beweis: Siehe z.B. MITTELHAMMER (1996), Seite 283.

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Ein weiteres nützliches Hilfsmittel ist die **Delta-Methode**. Sie liefert für Schätzer, die eine differenzierbare reellwertige Funktion eines asymptotisch multivariat normalverteilten Zufallsvektors sind, eine **Normalverteilungsapproximation**.

Genauer gilt: Es sei $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$ ein auf den m Beobachtungen $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ basierender und für $m \rightarrow \infty$ **asymptotisch multivariat normalverteilter** und **konsistenter Schätzer** für den Parametervektor $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$:

$$\sqrt{m} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m - \boldsymbol{\theta} \right) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{d} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$

Ferner sei

$$h : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto h(\mathbf{x})$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gilt für den transformierten Schätzer $h(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m)$ für den Parameter $h(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{m} \left(h(\hat{\boldsymbol{\theta}}_m) - h(\boldsymbol{\theta}) \right) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{d} N\left(\mathbf{0}, \text{grad } h(\boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{\Sigma} \text{ grad } h(\boldsymbol{\theta})\right),$$

wobei $\text{grad } h(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^k$ der **Gradient** von $h(\boldsymbol{\theta})$ ist. Für eine konkrete Anwendung der Delta-Methode in der Extremwerttheorie siehe Abschnitt 7.5.

8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Neben ihren vielen **hervorragenden analytischen Eigenschaften** besitzt die multivariate Normalverteilung aber auch eine Reihe von Eigenschaften, die sie für die Anwendung zur Beschreibung ökonomischer Sachverhalte und zur stochastischen Modellierung von Finanzmarktdaten oftmals **sehr problematisch** macht:

- Die Randverteilungen sind Normalverteilungen und damit **Light-Tail-Verteilungen**. D.h. sie besitzen zur Modellierung von Extremwerten oftmals zu wenig Masse auf den Tails.
- Durch die Randverteilungen können die bei Finanzdaten (z.B. Renditen) häufig zu beobachtenden steilgipfligen (**leptokurtischen**) **empirischen Verteilungen** nicht angemessen modelliert werden.
- Es können lediglich **lineare stochastische Abhängigkeiten** und **in den Tails nur schwache stochastische Abhängigkeiten** angemessen abgebildet werden.
- Es liegt **radiale Symmetrie** $\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} \stackrel{(d)}{=} \boldsymbol{\mu} - \mathbf{X}$ vor. Dies ist problematisch, da z.B. bei Tagesrenditen häufig empirisch zu beobachten ist, dass negative Renditen einen schwereren Tail aufweisen als positive Renditen.

Siehe hierzu das folgende Beispiel:

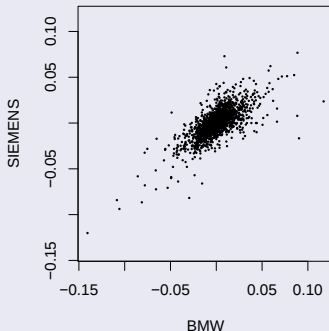
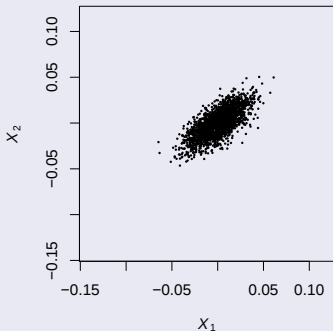
8. Multivariate Verteilungen

8.3 Multivariate Normalverteilung

Beispiel (Tagesrenditen der BMW- und Siemens-Aktie (2))

Links: Streudiagramm der mittels einer bivariaten Normalverteilung $N(\mu, \Sigma)$ simulierten Tagesrenditen. Die Parameter μ und Σ wurden mittels ML-Methode aus den tatsächlichen Tagesrenditen geschätzt.

Rechts: Streudiagramm mit den Tagesrenditen der BMW- und der Siemens-Aktie für den Zeitraum von 1985 bis 1993.



Abschnitt 8.4

Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung

8. Multivariate Verteilungen

8.4 Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung

Werden mehrere multivariate Normalverteilungen mit unterschiedlichen Erwartungswertvektoren und Varianz-Kovarianzmatrizen gemischt erhält man die **Klasse der Mittelwert-Varianz-gemischten multivariaten Normalverteilungen**:

Definition (Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung)

Ein n -dimensionaler Zufallsvektor $\mathbf{X}$ besitzt eine Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung, wenn

$$\mathbf{X} \stackrel{(d)}{=} \mathbf{m}(W) + \sqrt{W}\mathbf{A}\mathbf{Z} \quad (24)$$

gilt, wobei

- a) $\mathbf{Z}$ ein $N(\mathbf{0}, \mathbf{E})$ -verteilter m -dimensionaler Zufallsvektor,
- b) $W \geq 0$ eine von $\mathbf{Z}$ stochastisch unabhängige nichtnegative Zufallsvariable,
- c) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$
- d) $\mathbf{m} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine (messbare) Funktion

ist. Die Funktion $\mathbf{m}$ wird dann als Lokalisationsvektor und die Matrix $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ als Dispersionsmatrix bezeichnet.

8. Multivariate Verteilungen

8.4 Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung

Es gilt:

$$\mathbf{X}|W = w \stackrel{(d)}{=} \mathbf{m}(w) + \sqrt{w}\mathbf{A}\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{m}(w), w\mathbf{\Sigma}) \quad (25)$$

Sehr häufig wird als Lokalisationsvektor $\mathbf{m}$ die in W **affin-lineare Funktion**

$$\boxed{\mathbf{m}(W) = \boldsymbol{\mu} + W\boldsymbol{\gamma} \quad \text{mit } \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n} \quad (26)$$

gewählt. In diesem Fall gilt für den **bedingten Erwartungswertvektor** und die **bedingte Varianz-Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$** :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbf{X}|W] &= \boldsymbol{\mu} + W\boldsymbol{\gamma} \\ \text{Cov}(\mathbf{X}|W) &= W\mathbf{\Sigma}\end{aligned}$$

Für $\text{Var}(W) < \infty$ erhält man damit für den **unbedingten Erwartungswertvektor** und die **unbedingte Varianz-Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$** :

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{X}|W]] = \boldsymbol{\mu} + \mathbb{E}[W]\boldsymbol{\gamma} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbf{X}) &= \mathbb{E}[\text{Cov}(\mathbf{X}|W)] + \text{Cov}(\mathbb{E}[\mathbf{X}|W]) \\ &= \mathbb{E}[W]\mathbf{\Sigma} + \text{Var}(W)\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T\end{aligned} \quad (28)$$

8. Multivariate Verteilungen

8.4 Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung

Wird in (26) zusätzlich die Mischungsvariable W so gewählt, dass sie eine **verallgemeinerte Inverse-Gauss-Verteilung** besitzt, dann erhält man für $\mathbf{X}$ eine Verteilung aus der **Klasse der verallgemeinerten hyperbolischen Verteilungen**. Diese Verteilungen sind i.A. nicht elliptisch und spielen in der Literatur zur Modellierung von Finanzmarktdaten eine wichtige Rolle (siehe z.B. MCNEIL ET AL. (2005), S. 77 ff.).

Ein anderer wichtiger Spezialfall resultiert für $\gamma = \mathbf{0}$. Der Lokalisationsvektor (26) vereinfacht sich dann zu

$$\mathbf{m}(W) = \boldsymbol{\mu}. \quad (29)$$

Für (24) erhält man in diesem Spezialfall

$$\mathbf{X} \stackrel{(d)}{=} \boldsymbol{\mu} + \sqrt{W}\mathbf{A}\mathbf{Z} \quad (30)$$

und es gilt

$$\mathbf{X}|W = w \stackrel{(d)}{=} \boldsymbol{\mu} + \sqrt{w}\mathbf{A}\mathbf{Z} \sim N(\boldsymbol{\mu}, w\boldsymbol{\Sigma}). \quad (31)$$

Man sagt dann, dass $\mathbf{X}$ eine **Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung** besitzt.

8. Multivariate Verteilungen

8.4 Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung

Die Verteilung von (30) ist eine **Mischung von multivariaten Normalverteilungen** mit demselben Erwartungswertvektor μ und bis auf eine multiplikative Konstante $w \geq 0$ auch mit der gleichen Varianz-Kovarianzmatrix Σ . Die Werte und Wahrscheinlichkeiten der Gewichte w werden dabei durch die Verteilung von W festgelegt.

Diese Mischverteilung ist jedoch i.A. **keine multivariate Normalverteilung** mehr. Denn wenn W die Verteilungsfunktion F_W besitzt und $f_{\mathbf{X}|W}$ die Dichte von $\mathbf{X}$ bedingt gegeben W bezeichnet, erhält man für die Dichte von (30) die Darstellung

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \int f_{\mathbf{X}|W}(\mathbf{x}|w) dF_W(w) \\ &= \int \frac{w^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)}{2w}\right) dF_W(w). \end{aligned} \quad (32)$$

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass eine Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung, d.h. die Verteilung von (30), genau dann eine multivariate Normalverteilung ist, wenn **W eine Konstante** ist. Denn im Falle von $W = w$ f.s. vereinfacht sich (32) zu

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{w^{-n/2}}{(2\pi)^{n/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)}{2w}\right),$$

also zu der Dichte der multivariaten Normalverteilung $N(\mu, w\Sigma)$.

8. Multivariate Verteilungen

8.4 Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung

Aus (32) ist ferner ersichtlich, dass $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ von $\mathbf{x}$ nur über die **quadratische Funktion** $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ abhängt. D.h. die Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung gehört zur Klasse der **elliptischen Verteilungen** (siehe hierzu Abschnitt 8.5).

Wegen $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ vereinfachen sich (27)-(28) zu:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbf{X}] &= \boldsymbol{\mu} \\ \text{Cov}(\mathbf{X}) &= \mathbb{E}[W] \boldsymbol{\Sigma}\end{aligned}\tag{33}$$

Im Falle einer Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ folgt aus (33) dass die Komponenten von $\mathbf{X}$ **unkorreliert** sind. Aber aufgrund von

$$\mathbf{X} \stackrel{(d)}{=} \boldsymbol{\mu} + \sqrt{W} \mathbf{A} \mathbf{Z}$$

sind die Komponenten von $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ **nicht stochastisch unabhängig**, da $\sqrt{W}$ für eine nichtdegenerierte Zufallsvariable W stochastische Abhängigkeiten zwischen den Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ induziert. Mit (19) erhält man für $\mathbf{X}$ die **charakteristische Funktion**

$$\begin{aligned}C_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \mathbb{E}[\exp(i \mathbf{t}^T \mathbf{X})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\exp(i \mathbf{t}^T \mathbf{X}) \mid W]] \\ &= \exp\left(i \mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu}\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{2} W \mathbf{t}^T \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{t}\right)\right]\end{aligned}\tag{34}$$

für alle $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.

8. Multivariate Verteilungen

8.4 Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung

Das folgende Resultat besagt, dass die **affin-lineare Transformation** eines Zufallsvektors mit Varianz-gemischter multivariater Normalverteilung ebenfalls eine Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung besitzt:

Satz (Affin-lineare Transformation Varianz-gemischter normalvert. Zufallsvektoren)

Der Zufallsvektor $\mathbf{X}$ besitze eine Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung. D.h. es gelte

$$\mathbf{X} \stackrel{(d)}{=} \boldsymbol{\mu} + \sqrt{W}\mathbf{A}\mathbf{Z}$$

mit $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $W \geq 0$ und $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{E})$, wobei W und $\mathbf{Z}$ stochastisch unabhängig sind. Ferner sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{B}$ eine $(m \times n)$ -Matrix. Dann besitzt auch $\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ eine Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung. Genauer gilt dann:

$$\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b} \stackrel{(d)}{=} \mathbf{B}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b} + \sqrt{W}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{Z} \quad (35)$$

Beweis: Mit (19) erhält man für die charakteristische Funktion von $\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{B}\mathbf{X}+\mathbf{b}}(\mathbf{t}) &= \mathbb{E}[\exp(it^T(\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b}))] = \exp(it^T\mathbf{b})\mathbb{E}[\exp(it^T\mathbf{B}\mathbf{X})] = \exp(it^T\mathbf{b})\mathbb{E}[\mathbb{E}[\exp(it^T\mathbf{B}\mathbf{X}) \mid W]] \\ &= \exp(it^T\mathbf{b})\exp(it^T\mathbf{B}\boldsymbol{\mu})\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}W\mathbf{t}^T\mathbf{B}\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^T\mathbf{t}\right)\right] \\ &= \exp(it^T(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}))\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}W\mathbf{t}^T\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^T\mathbf{t}\right)\right] \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (34) zeigt, dass $\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ eine Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung der Gestalt (35) besitzt.

8. Multivariate Verteilungen

8.4 Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung

Beispiel (Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung)

a) Für eine Zufallsvariable

$$W = \begin{cases} w_1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ w_2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases}$$

mit $w_1, w_2 > 0$ und $w_1 \neq w_2$ erhält man als Verteilung für $\mathbf{X}$ eine Mischung aus zwei multivariaten Normalverteilungen, die zur Modellierung von zwei unterschiedlichen Volatilitätszuständen (z.B. „gewöhnliche Perioden“ und „Stressperioden“) verwendet werden kann.

b) Für eine Zufallsvariable W mit Inverser Gammaverteilung und den Parametern $v/2$ und $2/v$ mit $v \in \mathbb{N}$ (d.h. $W = \frac{1}{U}$ mit $U \sim \Gamma(v/2, 2/v)$) besitzt $\mathbf{X}$ eine multivariate t -Verteilung mit Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$, positiv definiter Skalierungsmatrix $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{N}$ Freiheitsgraden. D.h. $\mathbf{X}$ besitzt die Dichte

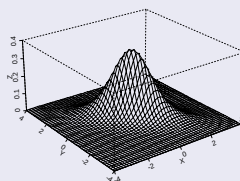
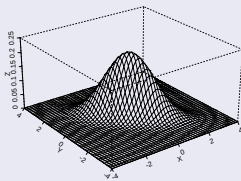
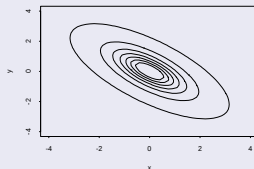
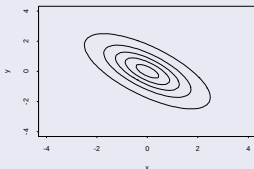
$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma((v+n)/2)}{\Gamma(v/2)(v\pi)^{n/2} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{1/2}} \left(1 + \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{v} \right)^{-\frac{v+n}{2}}$$

8. Multivariate Verteilungen

8.4 Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung

Beispiel (Fortsetzung)

Die multivariate t -Verteilung besitzt schwerere Tails als die multivariate Normalverteilung. Die untenstehende Abbildung zeigt eine bivariate Normalverteilung (links) und eine bivariate t -Verteilung (rechts) mit demselben Erwartungswertvektor und derselben Varianz-Kovarianzmatrix.

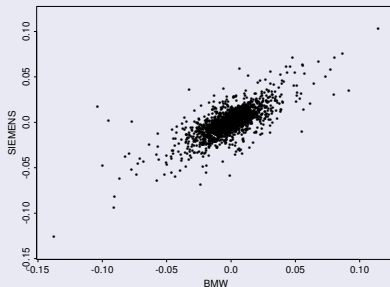
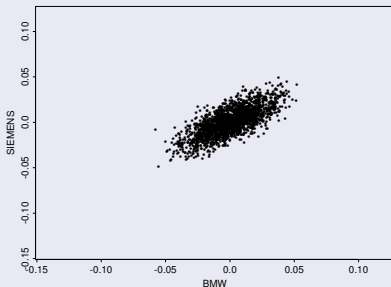


8. Multivariate Verteilungen

8.4 Mittelwert-Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung

Beispiel (Tagesrenditen der BMW- und Siemens-Aktie (3))

An die Tagesrenditen der BMW- und Siemens-Aktie im Zeitraum 1985–1993 wurde mittels ML-Methode eine bivariate Normalverteilung (links) und eine bivariate t -Verteilung angepasst. Anschließend wurden mit diesen Verteilungen neue Tagesrenditen für die BMW- und Siemens-Aktie simuliert. Die untenstehende Abbildung zeigt die resultierenden Streudiagramme für die angepasste bivariate Normalverteilung (links) und die angepasste bivariate t -Verteilung (rechts).



Abschnitt 8.5

Elliptische Verteilungen

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Für das quantitative Risikomanagement ist die Klasse der **elliptische Verteilungen** von großer Bedeutung. Sie kann als eine Erweiterung der multivariaten Normalverteilung betrachtet werden.

Die **charakteristische Funktion eines Zufallsvektors** $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ist gegeben durch

$$C_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu}) \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}\right) \quad \text{für alle } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \quad (36)$$

(vgl. (19)). Eine Verallgemeinerung von (36) führt zu den **elliptischen Verteilungen**:

Definition (Elliptische Verteilung)

Ein n -dimensionaler Zufallsvektor $\mathbf{X}$ mit der charakteristischen Funktion

$$C_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu}) \phi(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) \quad \text{für alle } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, \quad (37)$$

wobei $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ für eine $(n \times m)$ -Matrix $\mathbf{A}$ und $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist, heißt elliptisch-verteilt (kurz: $\mathbf{X} \sim E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$). Die Parameter $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ und ϕ werden dabei als Lokalisationsvektor, Dispersionsmatrix bzw. charakteristischer Generator der elliptischen Verteilung bezeichnet.

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Während der Lokalisationsvektor μ einer elliptischen Verteilung eindeutig bestimmt ist, gilt dies für Σ und ϕ **nur bis auf eine positive Konstante**. Zum Beispiel handelt es sich bei einer multivariaten Normalverteilung $N(\mu, \Sigma)$ um eine elliptische Verteilung, die als

$$E(\mu, \Sigma, \phi(\cdot)) \quad \text{oder} \quad E(\mu, c\Sigma, \phi(\cdot/c)) \quad \text{mit} \quad \phi(u) = \exp(-u/2)$$

und einer beliebigen Konstante $c > 0$ geschrieben werden kann (vgl. (37)).

Bemerkungen:

- Aus $\Sigma = AA^T$ folgt, dass Σ eine **symmetrische** und **positiv definite Matrix** mit **positiven Hauptdiagonalelementen** ist.
- Damit die rechte Seite von (37) die charakteristische Funktion eines elliptisch-verteilten Zufallsvektors $\mathbf{X}$ ist, **muss ϕ gewisse Eigenschaften besitzen**. Zum Beispiel muss $\phi(0) = 1$ gelten. Für eine notwendige und hinreichende Bedingung damit eine Funktion ϕ der charakteristische Generator einer elliptischen Verteilung ist, siehe z.B. FANG ET AL. (1990), Theorem 2.2.
- Durch entsprechende Wahl von ϕ können **Heavy-Tails**, **steilgipflige (leptokurtische) Verteilungen**, **nichtlineare Abhängigkeiten** und **Abhängigkeiten in den Tails** in einem gewissen Ausmaß modelliert werden. Allerdings weisen auch elliptische Verteilungen **radiale Symmetrie** auf.

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Bemerkungen (Fortsetzungen):

- Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} \sim E(\mathbf{0}, \mathbf{E}, \phi)$ besitzt eine sog. **sphärische Verteilung** mit charakteristischem Generator ϕ . Sphärische Verteilungen sind eine **Verallgemeinerung der multivariaten Standardnormalverteilung**.

Der zweite und dritte Satz in Abschnitt 8.3 lassen sich wie folgt von multivariaten Normalverteilungen auf elliptische Verteilungen verallgemeinern:

Satz (Charakterisierung elliptischer Verteilungen)

Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ ist genau dann $E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ -verteilt, wenn für alle $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Zufallsvariable $\mathbf{a}^T \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ univariat $E(\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{a}, \phi)$ -verteilt ist.

Beweis: Siehe z.B. FANG ET AL. (2018). ■

Satz (Affin-lineare Transformation elliptisch-verteilter Zufallsvektoren)

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein $E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ -verteilter Zufallsvektor, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{A}$ eine $(m \times n)$ -Matrix vom Rang $m \leq n$. Dann gilt

$$\mathbf{AX} + \mathbf{b} \sim E(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T, \phi). \quad (38)$$

Beweis: Siehe Übungsaufgaben.

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Die Momente eines elliptisch-verteilten Zufallsvektors $\mathbf{X} \sim E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ **müssen nicht existieren**. Falls jedoch die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X_i]$ aller Komponenten $X_1, \dots, X_n$ existieren, kann man mit Hilfe von (37) und (38) gezeigt werden, dass

$$\mathbb{E}[X_i] = \mu_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (39)$$

und damit insbesondere auch

$$\boxed{\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}}$$

gilt. Falls auch die Varianzen $\text{Var}(X_i)$ aller Komponenten $X_1, \dots, X_n$ existieren, zeigt man analog, dass

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = -2\phi'(0)\sigma_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n,$$

gilt, wobei σ_{ij} der (i, j) -Eintrag von $\boldsymbol{\Sigma}$ bezeichnet. D.h. im Falle der Existenz der Varianz-Kovarianzmatrix $\text{Cov}(\mathbf{X})$ ist diese gegeben durch

$$\boxed{\text{Cov}(\mathbf{X}) = -2\phi'(0)\boldsymbol{\Sigma}.}$$

Eine **notwendige Bedingung für die Existenz der Varianz-Kovarianzmatrix** $\text{Cov}(\mathbf{X})$ ist $|\phi'(0)| < \infty$ (vgl. CAMBANIS ET AL. (1981)).

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Falls die Varianz-Kovarianzmatrix von $\mathbf{X} \sim E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ existiert, ist die Verteilung von $\mathbf{X}$ **eindeutig festgelegt** durch

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}], \quad \text{Cov}(\mathbf{X}) \quad \text{und} \quad \phi.$$

Es gibt dann eine Darstellung $E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ für die elliptische Verteilung von $\mathbf{X}$, bei der nicht nur der Lokalisationsparameter $\boldsymbol{\mu}$ mit dem Erwartungswertvektor $\mathbb{E}[\mathbf{X}]$ übereinstimmt (vgl. (39)), sondern auch die Dispersionsmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ mit der Varianz-Kovarianzmatrix $\text{Cov}(\mathbf{X})$. Diese Darstellung muss jedoch nicht die Standarddarstellung der Verteilung sein.

Der folgende Satz besagt, dass ein elliptisch-verteilter Zufallsvektor $\mathbf{X}$ mit **stochastisch unabhängigen Komponenten** $X_1, \dots, X_n$ multivariat normalverteilt ist:

Satz (Stochastisch unabhängige Komponenten implizieren Normalverteiltheit)

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein $E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ -verteilter Zufallsvektor mit stochastisch unabhängigen Komponenten $X_1, \dots, X_n$, dessen Varianz-Kovarianzmatrix existiert und $\text{Var}(X_i) > 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Dann ist $\mathbf{X}$ multivariat normalverteilt.

Beweis: Siehe z.B. KELKER (1970).

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Ein elliptisch-verteilter Zufallsvektor $\mathbf{X} \sim E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ muss keine **Dichtefunktion** besitzen. Eine **notwendige Bedingung** dafür, dass $\mathbf{X}$ eine Dichtefunktion besitzt, ist

$$\text{rang}(\boldsymbol{\Sigma}) = n.$$

Falls jedoch $\mathbf{X} \sim E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ eine Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ besitzt, ist diese von der Gestalt

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{d}{\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} g\left((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \quad (40)$$

für eine **nichtnegative Funktion** $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ mit der Eigenschaft

$$0 < \int_0^\infty u^{n/2-1} g(u) du < \infty \quad (41)$$

und der **Normierungskonstanten**

$$d := \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \left(\int_0^\infty u^{n/2-1} g(u) du \right)^{-1}. \quad (42)$$

Wie man zeigen kann, gilt auch die Umkehrung dieser Aussage. D.h. jede nichtnegative Funktion g mit der Eigenschaft (41) führt mit der Konstanten (42) über (40) zur Dichtefunktion einer elliptischen Verteilung (vgl. LANDSMAN-VALDEZ (2003)). Die Funktion g wird dann als **Dichtegenerator der elliptischen Verteilung** bezeichnet.

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Die Dichtefunktion (40) hängt offensichtlich nur über die **quadratische Form**

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$$

von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ab. D.h. die Dichtefunktion (40) ist auf Mengen der Form

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = c \right\} \quad (43)$$

mit $c > 0$ konstant. Bei diesen Mengen handelt es sich um **Ellipsoide im $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt $\boldsymbol{\mu}$** . Diese Eigenschaft von elliptischen Verteilungen mit Dichtefunktion erklärt ihre Bezeichnung.

Im Spezialfall von $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (\mathbf{0}, \mathbf{E})$ (d.h. im Falle einer sphärischen Verteilung mit Dichtefunktion) handelt es sich bei der Menge (43) um eine **Sphäre im $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und Radius $\sqrt{c}$** . Diese Eigenschaft erklärt die Bezeichnung von sphärischen Verteilungen mit Dichtefunktion.

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Beispiel (Elliptische Verteilungen)

- a) Eine multivariate Normalverteilung $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ist eine elliptische Verteilung mit dem Dichtegenerator und der Normierungskonstanten

$$g(u) = \exp(-u/2) \quad \text{bzw.} \quad d = (2\pi)^{-n/2}.$$

- b) Eine multivariate t -Verteilung $t(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu)$ (der Parameter $\nu \in \mathbb{N}$ wird als Freiheitsgrade bezeichnet) ist eine elliptische Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma((\nu+n)/2)}{\Gamma(\nu/2)(\pi\nu)^{n/2}\sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \left(1 + \frac{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})}{\nu}\right)^{-(\nu+n)/2}.$$

D.h. der Dichtegenerator und die Normierungskonstante sind gegeben durch

$$g(u) = \left(1 + \frac{u}{\nu}\right)^{-(\nu+n)/2} \quad \text{bzw.} \quad d = \frac{\Gamma((\nu+n)/2)}{\Gamma(\nu/2)(\pi\nu)^{n/2}}.$$

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Beispiel (Fortsetzung)

Mit dem vorletzten Satz erhält man (wähle $\mathbf{A} = \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{b} = \mathbf{0}$), dass die ein-dimensionalen Randverteilungen eines $t(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu)$ -verteilten Zufallsvektors $\mathbf{X}$ univariate t -Verteilungen sind. Genauer gilt $X_i \sim t(\mu_i, \sigma_{ii}, \nu)$ und die Dichtefunktion von X_i ist gegeben durch

$$f_{X_i}(x) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)(\pi\nu)^{1/2}\sqrt{\sigma_{ii}}} \left(1 + \frac{(x - \mu_i)^2}{\nu\sigma_{ii}}\right)^{-(\nu+1)/2}.$$

Für $\nu > 1$ existiert der Erwartungswert und ist gegeben durch $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$. Für $\nu > 2$ existiert auch die Varianz und beträgt dann $\text{Var}(X_i) = \frac{\nu}{\nu-2} \sigma_{ii}$.

- c) Bei einer Varianz-gemischten multivariaten Normalverteilungen ist die Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ ebenfalls konstant auf Mengen der Form (43) (vgl. (32)). Wie man zeigen kann, besitzt ihre charakteristische Funktion $C_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ die Gestalt (37). D.h. die Varianz-gemischten multivariaten Normalverteilungen gehören ebenfalls zur Klasse der elliptischen Verteilungen.

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Die untenstehende Tabelle gibt die **wichtigsten Familien von elliptischen Verteilungen** mit ihrem zugehörigen charakteristischen Generator ϕ und/oder Dichtegenerator g an:

Verteilungsfamilie	Dichtegenerator g und/oder charakteristischen Generator ϕ
Normalverteilung	$g(u) = \exp(-u/2), \phi(u) = -\exp(-u/2)$
t -Verteilung	$g(u) = \left(1 + \frac{u}{v}\right)^{-(v+n)/2}; v \in \mathbb{N}$
Cauchy-Verteilung	$g(u) = (1+u)^{-(1+n)/2}$ (Spezialfall der t -Verteilung mit $v = 1$)
Exponential-Power-Verteilung	$g(u) = \exp(-ru^s); r, s > 0$
Laplace-Verteilung	$g(u) = \exp(- u)$
Logistische-Verteilung	$g(u) = \frac{\exp(-u)}{(1+\exp(-u))^2}$
Alpha-stabile Verteilungen	$\phi(u) = \exp(-ru^s/2); 0 < s \leq 2, r > 0$

Elliptische Verteilungen besitzen bezüglich **Randverteilungen, bedingten Verteilungen** und **Reproduktivität** die gleichen guten Eigenschaften, wie multivariate Normalverteilungen.

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Mit Hilfe des vorletzten Satzes erhält man leicht, dass sämtliche **Randverteilungen** einer elliptischen Verteilung ebenfalls elliptische Verteilungen sind:

Folgerung (Randverteilungen einer elliptischen Verteilung)

Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ sei $E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ -verteilt und $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^T$ sei eine beliebige Zerlegung von $\mathbf{X}$ in einen p - und einen $(n-p)$ -dimensionalen Zufallsvektor $\mathbf{X}_1$ bzw. $\mathbf{X}_2$, so dass $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)^T$ und

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$$

gilt. Für die Randverteilungen von $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ gilt dann

$$\mathbf{X}_1 \sim E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11}, \phi) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{X}_2 \sim E(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22}, \phi).$$

Beweis: Siehe z.B. FANG ET AL. (2018). ■

Dies bedeutet insbesondere, dass alle Komponenten eines elliptisch-verteilten Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ **univariat elliptisch-verteilt** sind.

8. Multivariate Verteilungen

8.5 Elliptische Verteilungen

Bemerkung: Ist $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^T$ eine beliebige Zerlegung eines $E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ -verteilten Zufallsvektors $\mathbf{X}$ in einen p - und einen $(n - p)$ -dimensionalen Zufallsvektor (vgl. letzten Satz), dann ist die **bedingte Verteilung von $\mathbf{X}_1$, gegeben $\mathbf{X}_2$** , wieder eine elliptische Verteilung. Im Allgemeinen besitzt jedoch die bedingte Verteilung einen anderen charakteristischen Generator $\tilde{\phi}$. Für Details, wie sich der charakteristische Generator verändert, siehe z.B. FANG ET AL. (2018).

Mit Hilfe der charakteristischen Funktion der elliptischen Verteilung (36) lässt sich zeigen, dass die elliptische Verteilung bei (bis auf einen Skalierungsparameter $c > 0$) identischer Dispersionsmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ **reproduktiv** ist. Genauer gilt:

Satz (Reproduktivität der elliptischen Verteilung)

Die beiden n -dimensionalen Zufallsvektoren $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ seien stochastisch unabhängig und $E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}, \phi_1)$ - bzw. $E(\boldsymbol{\mu}_2, c\boldsymbol{\Sigma}, \phi_2)$ -verteilt mit $c > 0$. Dann gilt für ihre Summe $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \sim E(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}, \tilde{\phi})$.

Beweis: Siehe Übungsaufgaben. ■

In Kapitel 9 wird gezeigt, wie mittels **Copulas** neue multivariate Verteilungen mit ganz unterschiedlichen Eigenschaften konstruiert werden können.

Abschnitt 8.6

Literatur

8. Multivariate Verteilungen

8.6 Literatur

-  BROCKWELL, P. J., DAVIS, R. A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer.
-  CAMBANIS, S., HUANG, S., SIMONS, G. (1981). *On the theory of elliptically contoured distributions*. Journal of Multivariate Analysis, 11, p. 368–385.
-  FANG, K. T., KOTZ, S., NG, K. W. (2018). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. CRC Press.
-  KELKER, D. (1970): *Distribution theory of spherical distributions and location-scale parameter generalization*. Sankhya, 32, p. 419–430.
-  KOTZ, S., BALAKRISHNAN, N., JOHNSON, N. L. (2000). *Continuous Multivariate Distributions, Models and Applications*. Wiley.
-  LANDSMAN, Z. M., VALDEZ, E. A. (2003): *Tail conditional expectations for elliptical distributions*. North American Actuarial Journal, 7/4, p. 55–71.
-  MCNEIL, A. J., FREY, R., EMBRECHTS, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton Press.

8. Multivariate Verteilungen

8.6 Literatur



MITTELHAMMER, R. C. (1996). *Mathematical Statistics for Economics and Business*. Springer.



TAPPE, S. (2013): *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer.



VALDEZ, E. A., DHAENE, J. (2004): *Bounds for sums of non-independent log-elliptical random variables*. Technical Report, University of New South Wales, Australia.