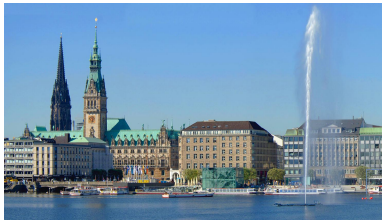


Quantitatives Risikomanagement 2

SS 2026

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg

Lehrstuhl für BWL, insb. Mathematik und Statistik in den Wirtschaftswissenschaften



Kapitel 9

Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

Abschnitt 9.1

Einleitung

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.1 Einleitung

Die **stochastische Unabhängigkeit** von Ereignissen und Zufallsvariablen lässt sich sehr einfach charakterisieren. Zum Beispiel sind zwei Zufallsvariablen X und Y genau dann **stochastisch unabhängig**, wenn

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) \quad \text{also} \quad F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Andernfalls werden X und Y als **stochastisch abhängig** bezeichnet. D.h. X und Y sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeiten für die Ausprägungen von X keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten für die Ausprägungen von Y haben und umgekehrt. Ist dies nicht der Fall, spricht man von stochastischer Abhängigkeit.

Bei der Modellierung von versicherungstechnischen und finanzwirtschaftlichen Risiken stellt das Vorhandensein von stochastischen Abhängigkeiten den **Regelfall** dar. Während es jedoch nur eine Form der stochastischen Unabhängigkeit gibt, existieren **unendlich viele Arten von stochastischer Abhängigkeit**. Dies hat zur Folge, dass die Berücksichtigung von stochastischen Abhängigkeiten bei der Modellierung von versicherungstechnischen und finanzwirtschaftlichen Risiken häufig eine anspruchsvolle Aufgabenstellung darstellt.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.1 Einleitung



Grundsätzlich können bei versicherungstechnischen und finanzwirtschaftlichen Risiken die beiden folgenden **Arten von Abhängigkeiten** unterschieden werden:



- a) **Räumliche oder zeitliche Abhängigkeiten zwischen gleichartigen Risiken**, wie z.B.:
 - Versicherung von Sturmschäden an Gebäuden in der gleichen Region (räumliche Abhängigkeit)
 - Rendite eines Wertpapiers in aufeinander folgenden Zeitperioden (zeitliche Abhängigkeit)
- b) **Abhängigkeiten zwischen verschiedenen, aber irgendwie zusammenhängender Risiken**, wie z.B.
 - Hagelversicherung für das Risiko „Hagel“ und Autokaskoversicherung für das Risiko „Autoschaden“
 - Renditen von verschiedenen Wertpapieren in der gleichen Zeitperiode (vgl. nächstes Beispiel)

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.1 Einleitung

Beispiel (Tagesrenditen der BMW- und Siemens-Aktie (4))

Betrachtet wird ein Unternehmen, dessen Portfolio aus BMW- und Siemens-Aktien besteht und deren Tagesrenditen zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt mit Hilfe der Zufallsvariablen X und Y stochastisch modelliert werden. Dann interessiert sich das Unternehmen nicht nur für die Verteilungsfunktionen von X und Y , d.h. für

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad \text{und} \quad F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y),$$

sondern vor allem auch für Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $(X, Y)^T$, d.h. für

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y). \quad (1)$$

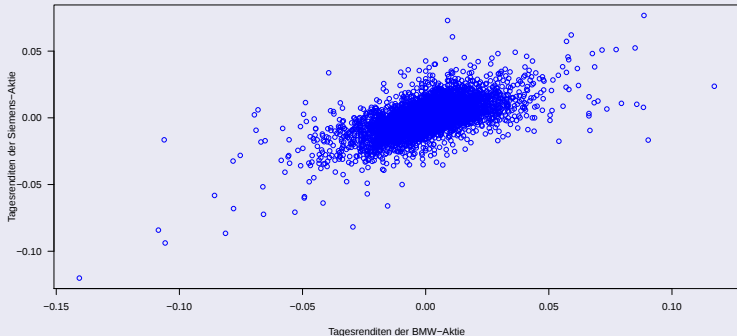
Denn nur mit der Verteilungsfunktion (1) lässt sich z.B. die Frage beantworten, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Gesamtrendite für das Portfolio zu dem betrachteten zukünftigen Zeitpunkt nicht unter einem bestimmten Schwellenwert liegt. Nur sie enthält alle Informationen über die Art der stochastischen Abhängigkeiten zwischen den beiden Tagesrenditen X und Y . Z.B. wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass beide Aktien gleichzeitig hohe oder niedrige Tagesrenditen aufweisen.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.1 Einleitung

Beispiel (Fortsetzung)

Die folgende Abbildung zeigt ein Streudiagramm mit den Tagesrenditen der BMW- und der Siemens-Aktie für den Zeitraum vom 2.1.1973 bis zum 23.7.1996. Es ist zu erkennen, dass bei den beiden Aktien hohe bzw. niedrige Tagesrenditen tendenziell gleichzeitig auftreten, also eine gewisse stochastische Abhängigkeit zwischen X und Y besteht.



Abschnitt 9.2

Linearer Korrelationskoeffizient

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Das bekannteste Maß zur Messung stochastischer Abhängigkeiten zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y ist der nach dem britischen Statistiker Karl Pearson (1857–1936) benannte **lineare Korrelationskoeffizient von Pearson**.



Definition (Linearer Korrelationskoeffizient von Pearson)

Für zwei Zufallsvariablen X, Y mit $0 < \text{Var}(X), \text{Var}(Y) < \infty$ wird

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} \quad (2)$$

linearer Korrelationskoeffizient (von Pearson) genannt. Im Falle von $\rho(X, Y) = 0$, werden die Zufallsvariablen X und Y als unkorreliert bezeichnet.

Aus der **Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung**

$$\begin{aligned} |\text{Cov}(X, Y)| &= |\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]| \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2]} = \sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)} \end{aligned} \quad (3)$$

folgt unmittelbar

$$\rho(X, Y) \in [-1, 1].$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

D.h. als „normierte Kovarianz“ sind die Werte des linearen Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$ auf das Intervall $[-1, 1]$ beschränkt.

Darüber hinaus besitzt der lineare Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y)$ die folgenden Eigenschaften:

Satz (Eigenschaften des linearen Korrelationskoeffizienten)

Für zwei Zufallsvariablen X, Y mit $0 < \text{Var}(X), \text{Var}(Y) < \infty$ gilt:

- a) X und Y stochastisch unabhängig folgt $\rho(X, Y) = 0$
- b) $\rho(aX + b, cY + d) = \frac{ac}{|ac|} \rho(X, Y)$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, c \neq 0$
- c) $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, c > 0$ oder $a, c < 0$
- d) $\rho(X, Y) \in \{-1, 1\} \iff \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$

Beweis: Zu a) Aus X und Y stochastisch unabhängig folgt

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$$

und damit $\rho(X, Y) = 0$ (vgl. (2)).

Zu b) Mit den Eigenschaften der Kovarianz und der Varianz erhält man:

$$\rho(aX + b, cY + d) = \frac{\text{Cov}(aX + b, cY + d)}{\sqrt{\text{Var}(aX + b)\text{Var}(cY + d)}} = \frac{ac\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{a^2\text{Var}(X)c^2\text{Var}(Y)}} = \frac{ac\text{Cov}(X, Y)}{|ac|\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{ac}{|ac|} \rho(X, Y)$$

Zu c) Da $ac = |ac|$ für $a, c > 0$ und $a, c < 0$ gilt, folgt die Behauptung unmittelbar aus Aussage b).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Beweis (Fortsetzung): Zu d): Es sei angenommen, dass es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$ gibt. Dann folgt mit Aussage b):

$$\rho(X, Y) = \rho(X, aX + b) = \frac{a}{|a|} \rho(X, X) = \frac{a}{|a|} \frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X)} = \frac{a}{|a|} \in \{-1, 1\}$$

Es gelte nun umgekehrt $\rho(X, Y) \in \{-1, 1\}$. Für die neue Zufallsvariable

$$Z := \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} Y - \frac{\rho(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} X$$

erhält man mit den Eigenschaften der Kovarianz und Varianz:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= \text{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} Y - \frac{\rho(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} X\right) = \text{Cov}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} Y - \frac{\rho(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} X, \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} Y - \frac{\rho(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} X\right) \\ &= \text{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} Y\right) - 2\text{Cov}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} Y, \frac{\rho(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} X\right) + \text{Var}\left(\frac{\rho(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} X\right) \\ &= \frac{1}{\text{Var}(Y)} \text{Var}(Y) - 2 \frac{\rho(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}} \text{Cov}(Y, X) + \frac{\rho(X, Y)^2}{\text{Var}(X)} \text{Var}(X) \\ &= 1 - 2\rho(X, Y)^2 + \rho(X, Y)^2 = 1 - \rho(X, Y)^2 = 0 \end{aligned}$$

Aus $\text{Var}(Z) = \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2] = 0$ folgt jedoch $\mathbb{P}(Z = \mathbb{E}[Z]) = 1$ und damit

$$1 = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} Y - \frac{\rho(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} X = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} \mathbb{E}[Y] - \frac{\rho(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \mathbb{E}[X]\right) = \mathbb{P}\left(Y = \frac{\rho(X, Y) \sqrt{\text{Var}(Y)}}{\sqrt{\text{Var}(X)}} X + \mathbb{E}[Y] - \frac{\rho(X, Y) \sqrt{\text{Var}(Y)}}{\sqrt{\text{Var}(X)}} \mathbb{E}[X]\right)$$

D.h. es existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, so dass $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$ gilt.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Diskussion der Eigenschaften von $\rho(X, Y)$

- Die Umkehrung der Aussage a) ist i.A. falsch (siehe folgendes Beispiel). Die Umkehrung gilt nur für Zufallsvariablen, die gemeinsam **multivariat normalverteilt** sind (vgl. Abschnitt 8.3).
- Aufgrund der Aussage d) ist $\rho(X, Y)$ vor allem zur Quantifizierung des Grades und der Richtung einer **linearen Abhängigkeit** zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y geeignet: Je näher $|\rho(X, Y)|$ bei Eins liegt, umso stärker ist der **lineare Zusammenhang** zwischen X und Y , wobei das Vorzeichen von $\rho(X, Y)$ die Richtung des linearen Zusammenhanges angibt, also ob Y mit steigenden Werten von X tendenziell wächst (sog. **positive Korrelation**) oder fällt (sog. **negative Korrelation**). Im Falle von $\rho(X, Y) = 1$ und $\rho(X, Y) = -1$ spricht man von **perfekter positiver** bzw. **perfekter negativer linearer Abhängigkeit**.
- Der lineare Korrelationskoeffizient misst jedoch keine nichtlinearen Abhängigkeiten. Zum Beispiel ist es möglich, dass $\rho(X, Y) = 0$ gilt, obwohl X und Y einen funktionalen Zusammenhang aufweisen (siehe folgendes Beispiel). Daher sollte der lineare Korrelationskoeffizient nur bei Zufallsvariablen, die **gemeinsam multivariat normalverteilt** sind, zur Quantifizierung stochastischer Abhängigkeiten verwendet werden. Denn dann existieren nur lineare Abhängigkeiten zwischen den Zufallsvariablen und ihre Abhängigkeitsstruktur wird vollständig durch die linearen Korrelationskoeffizienten beschrieben.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

- Bei Zufallsvariablen, die **gemeinsam elliptisch-verteilt** sind, ist die Abhängigkeitsstruktur, d.h ihre Copula (vgl. Abschnitt 9.3), nur von der Korrelationsmatrix und dem charakteristischen Generator der elliptischen Verteilung abhängig. Aus diesem Grund ist die Betrachtung des linearen Korrelationskoeffizienten auch im Falle gemeinsam elliptisch-verteilter Zufallsvariablen sinnvoll.
- Die Aussage b) besagt, dass sich der lineare Korrelationskoeffizient von **affin-linear transformierten Zufallsvariablen** $aX + b$ und $cY + d$ leicht aus $\rho(X, Y)$ berechnen lässt.
- Die Aussage c) besagt, dass der lineare Korrelationskoeffizient **invariant ist bzgl. positiv affin-linearen Transformationen**. D.h. es gilt

$$\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y) \quad \text{für } a, c > 0.$$

Diese Eigenschaft ist z.B. bei Währungsumrechnungen nützlich.

- Der lineare Korrelationskoeffizient ist jedoch i.A. **nicht invariant bzgl. streng monoton wachsenden Transformationen** $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. D.h. es gilt i.A.

$$\rho(X, Y) \neq \rho(T(X), T(Y)).$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

- Der lineare Korrelationskoeffizient besitzt den weiteren Nachteil, dass er nur bei **endlichen Varianzen** der Zufallsvariablen definiert ist. Dies kann bei der Betrachtung von Heavy-Tail-Verteilungen Probleme verursachen.
- Der Wert $\rho^2(X, Y)$ stimmt mit dem **Bestimmtheitsmaß R^2** überein und gibt den Anteil der Streuung von Y an, der durch die Streuung von X erklärt wird (siehe Vorlesungen über Regressionsanalyse).
- Die Aussage, dass die Randverteilungen und die paarweisen linearen Korrelationen eines Zufallsvektors seine Verteilung festlegen ist i.A. falsch. Im Falle von **elliptischen Verteilungen** (also insbesondere multivariaten Verteilungen) ist die Aussage jedoch richtig.
- Bei zwei Zufallsvariablen mit gegebenen Randverteilungsfunktionen F_X und F_Y können unterschiedliche Abhängigkeitsstrukturen (d.h. Copulas) zum gleichen Wert für $\rho(X, Y)$ führen. Umgekehrt ist es aber auch möglich, dass es bei vorgegebenen Randverteilungsfunktionen F_X und F_Y keine Abhängigkeitsstruktur (d.h. keine Copula) gibt, so dass $\rho(X, Y)$ einen bestimmten vorgegebenen Wert annimmt. D.h. die Aufgabe zu zwei Zufallsvariablen X und Y mit gegebenen Randverteilungsfunktionen F_X und F_Y eine gemeinsame Verteilungsfunktion $F_{(X,Y)}$ zu finden, so dass $\rho(X, Y)$ einen bestimmten Wert aus dem Intervall $[-1, 1]$ annimmt, ist möglicherweise nicht eindeutig oder auch gar nicht lösbar.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

- Bei der Interpretation von Korrelationen ist darauf zu achten, dass aus einer vorhandenen linearen Korrelation zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y nicht auf einen kausalen, sondern nur auf einen **statistischen Zusammenhang** geschlossen werden kann. Denn Korrelation ist ein rein statistischer Begriff, der weder Kausalität impliziert noch von ihr impliziert wird. Man spricht von **Scheinkorrelation** (besser wäre eigentlich von Scheinkausalität zu sprechen), wenn eine Korrelation zwischen zwei Größen vorliegt, der kein Kausalzusammenhang, sondern nur eine zufällige oder indirekte Beziehung zugrunde liegt. Z.B. sind die Zahl der Geburten X und die Zahl der beobachteten Storchpaare Y in einer Region oftmals positiv korreliert. Dennoch gibt es keinen direkten (kausalen) Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen. Werden nämlich X und Y um den „Grad der Verstädterung“ bereinigt (in ländlichen Regionen nisten mehr Störche und werden tendenziell auch mehr Kinder pro Paar geboren), gibt es zwischen X und Y keine nennenswerte Korrelation mehr.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Beispiel (Unkorreliertheit impliziert i.A. nicht stochastische Unabhängigkeit)

Es sei $X \sim N(0, 1)$ und $Y := X^2$. D.h. es gilt $f_X(-x) = f_X(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und mit der Variablentransformation $u = -x$, $dx = -du$, $x = 0 \rightarrow u = 0$, $x = \infty \rightarrow u = -\infty$ folgt daraus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^{2k+1}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^{2k+1} f_X(x) dx + \int_0^{\infty} x^{2k+1} f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 x^{2k+1} f_X(x) dx - \int_{-\infty}^0 u^{2k+1} f_X(u) du = 0\end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt $\mathbb{E}[X] = 0$ und $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^3] = 0$, also insbesondere

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho(X, Y) = 0.$$

D.h. die Zufallsvariablen X und Y sind unkorreliert. Sie sind aber offensichtlich nicht stochastisch unabhängig. Zum Beispiel gilt

$$\underbrace{\mathbb{P}(X > 1 \text{ und } Y^2 \leq 1)}_{=0} \neq \underbrace{\mathbb{P}(X > 1)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(Y^2 \leq 1)}_{\neq 0}.$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Liegen für den Zufallsvektor $(X, Y)^T$ die Beobachtungen

$$\{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n\}$$

vor, kann der lineare Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y)$ mit Hilfe des **empirischen linearen Korrelationskoeffizienten**

$$r(X, Y) := \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (4)$$

geschätzt werden. Dabei bezeichnen

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad \bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

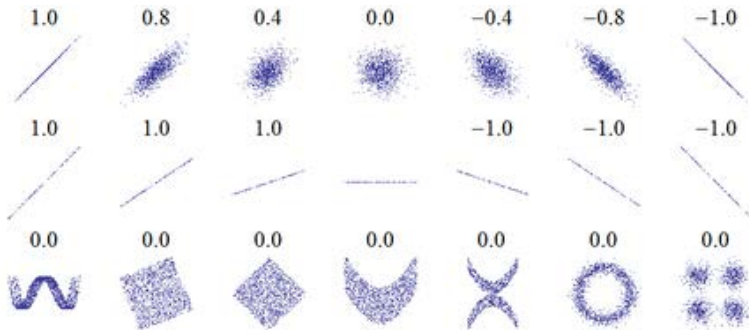
die **arithmetischen Mittel** der Beobachtungen $x_1, \dots, x_n$ bzw. $y_1, \dots, y_n$. Durch eine einfache Umformung erhält man für (4) die alternative Darstellung:

$$r(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right)}}$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Die untenstehende Abbildung zeigt verschiedene **Streudiagramme** mit dem Wert des jeweils zugehörigen **empirischen linearen Korrelationskoeffizienten** (4). Dieser Wert gibt das Ausmaß und die generelle Richtung der linearen Abhängigkeit zwischen X und Y an (obere Zeile), nicht aber die Steigung der „Punktewolke“ (obere und mittlere Zeile). Verläuft das Streudiagramm exakt waagrecht (Bild in der Mitte), kann für $r(X, Y)$ wegen $s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 0$ kein Wert berechnet werden. Nichtlineare Abhängigkeiten zwischen X und Y werden durch $r(X, Y)$ nicht erfasst (untere Zeile).



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Beispiel (Tagesrenditen der BMW- und Siemens-Aktie (5))

Für die Tagesrenditen der BMW- und der Siemens-Aktie im Zeitraum vom 2.1.1973 bis zum 23.7.1996 erhält man für den empirischen linearen Korrelationskoeffizienten (4) den Wert

$$r(X, Y) = 0,637392.$$

Es liegt somit eine positive Korrelation zwischen den Tagesrenditen der BMW- und Siemens-Aktie vor. Dies bedeutet, dass höhere Tagesrenditen bei der BMW-Aktie tendenziell mit höheren Tagesrenditen bei der Siemens-Aktie einhergehen.

Wie bereits erwähnt, ist der lineare Korrelationskoeffizient $\rho(X, Y)$ für **multivariat normalverteilte Zufallsvektoren** $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein gutes Abhängigkeitsmaß. Der folgende Satz besagt, dass sich in diesem Fall der **Value-at-Risk** und der **Expected-Shortfall** des Gesamtrisikos

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

sehr leicht aus den Value-at-Risks, Expected-Shortfalls und den linearen Korrelationskoeffizienten der Teilrisiken $X_1, \dots, X_n$ berechnen lassen:

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Satz (VaR und ES des Gesamtrisikos bei multivariat normalverteilten Einzelrisiken)

Der Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_n)^T$ sei multivariat normalverteilt. Für den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall des Gesamtrisikos $X = \sum_{i=1}^n X_i$ zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ gilt dann:

$$\text{VaR}_q(X) = \mathbb{E}[X] + \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \rho(X_i, X_j) (\text{VaR}_q(X_i) - \mathbb{E}[X_i]) (\text{VaR}_q(X_j) - \mathbb{E}[X_j])}$$

bzw.

$$\text{ES}_q(X) = \mathbb{E}[X] + \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \rho(X_i, X_j) (\text{ES}_q(X_i) - \mathbb{E}[X_i]) (\text{ES}_q(X_j) - \mathbb{E}[X_j])}$$

Beweis: Der Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_n)^T$ ist multivariat normalverteilt, folglich ist die Summe $X = \sum_{i=1}^n X_i$ (univariat) normalverteilt mit dem Erwartungswert und der Varianz

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \quad \text{bzw.} \quad \text{Var}(X) = \sum_{i,j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i,j=1}^n \rho(X_i, X_j) \sqrt{\text{Var}(X_i) \text{Var}(X_j)} \quad (5)$$

(vgl. Abschnitt 8.3).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Beweis (Fortsetzung): Im Falle eines normalverteilten Risikos X besitzt der Value-at-Risk und der Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ die Darstellung

$$\tilde{\rho}_1(X) := \text{VaR}_q(X) = \mathbb{E}[X] + \sqrt{\text{Var}(X)}\Phi^{-1}(q) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\rho}_2(X) := \text{ES}_q(X) = \mathbb{E}[X] + \sqrt{\text{Var}(X)}\frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1-q}$$

wobei ϕ und Φ die Dichte- bzw. Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet (vgl. Abschnitt 2.5). Mit (5)

sowie $f_1(q) := \Phi^{-1}(q)$ und $f_2(q) := \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1-q}$ erhält man daher für $l = 1, 2$

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_l(X) &= \mathbb{E}[X] + \sqrt{\text{Var}(X)}f_l(q) = \mathbb{E}[X] + \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \rho(X_i, X_j) \sqrt{\text{Var}(X_i)\text{Var}(X_j)}f_l(q)} \\ &= \mathbb{E}[X] + \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \rho(X_i, X_j) \left(\sqrt{\text{Var}(X_i)}f_l(q)\right) \left(\sqrt{\text{Var}(X_j)}f_l(q)\right)} \\ &= \mathbb{E}[X] + \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \rho(X_i, X_j) (\tilde{\rho}_l(X_i) - \mathbb{E}[X_i]) (\tilde{\rho}_l(X_j) - \mathbb{E}[X_j])}\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ■

Aus der Translationsinvarianz des Value-at-Risk und des Expected-Shortfall folgt

$$\text{VaR}_q(X) - \mathbb{E}[X] = \text{VaR}_q(X - \mathbb{E}[X]) \quad \text{und} \quad \text{ES}_q(X) - \mathbb{E}[X] = \text{ES}_q(X - \mathbb{E}[X])$$

(vgl. Abschnitte 2.4 und 2.5). Diese beiden Risikomaße werden häufig als **mean Value-at-Risk** bzw. **mean Expected-Shortfall** zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ bezeichnet.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Beispiel (Abhängigkeitsmodellierung im Standardansatz von Solvency II)

Analog zu Basel II/III für Banken wird in der EU durch **Solvency II** das von Versicherungsunternehmen vorzuhaltende Risikokapital geregelt. Das für das Gesamtrisiko

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

vorzuhaltende Risikokapital (Solvency Capital Requirements) $\text{SCR}(X)$ soll dabei dem **Value-at-Risk** zum Sicherheitsniveau $q = 99,5\%$ entsprechen. Falls kein individuelles Modell eingesetzt wird, ist ein **Standardansatz** zu verwenden, bei dem zuerst die einzelnen Teilrisiken $X_1, \dots, X_n$ betrachtet und die dafür benötigten Risikokapitalien $\text{SCR}(X_1), \dots, \text{SCR}(X_n)$ ermittelt werden. Anschließend erfolgt eine mehrstufige Aggregation dieser Risikokapitalien mittels der sog. **Standardrisikoformel**

$$\text{SCR}(X)^2 = \sum_{i,j=1}^n \rho(X_i, X_j) \text{SCR}(X_i) \text{SCR}(X_j). \quad (6)$$

D.h. die vorhandenen Abhängigkeiten zwischen den Risiken werden mittels (vorgegebenen) linearen Korrelationskoeffizienten $\rho(X_i, X_j)$ modelliert.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Beispiel (Fortsetzung)

Wird für den Zufallsvektor $(X_1, \dots, X_n)^T$ zusätzlich angenommen, dass er multivariat normalverteilt ist, erhält man mit dem letzten Satz für die Standardrisikoformel (6) die Darstellung:

$$\underbrace{\text{VaR}_q(X) - \mathbb{E}[X]}_{=: \text{SCR}(X)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \rho(X_i, X_j) \underbrace{(\text{VaR}_q(X_i) - \mathbb{E}[X_i])}_{=: \text{SCR}(X_i)} \underbrace{(\text{VaR}_q(X_j) - \mathbb{E}[X_j])}_{=: \text{SCR}(X_j)}}$$

D.h. die Standardrisikoformel (6) zur Aggregation der Risikokapitalien für die Teilrisiken $X_1, \dots, X_n$ ist dann konsistent mit einem Ansatz, bei dem $(X_1, \dots, X_n)^T$ multivariat normalverteilt ist und die Risikokapitalien mittels des mean Value-at-Risk

$$\text{VaR}_q(X_i) - \mathbb{E}[X_i]$$

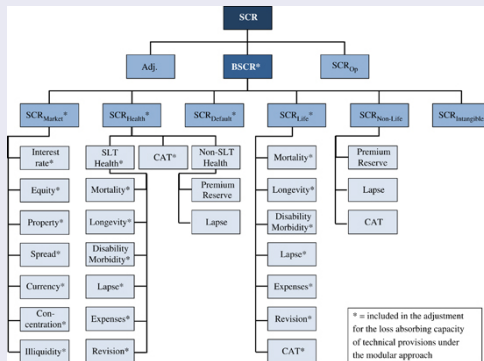
berechnet werden.

Die folgende Abbildung zeigt den modularen Aufbau bei der Bestimmung des Risikokapitals gemäß Solvency II:

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Beispiel (Fortsetzung)



Die Basic Solvency Capital Requirements (BSCR) setzen sich aus sechs Teilrisiken (sog. Risikomodule) zusammen, welche wiederum aus mehreren Untermodulen bestehen können.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.2 Linearer Korrelationskoeffizient

Beispiel (Fortsetzung)

Die beiden folgenden Tabellen zeigen die linearen Korrelationskoeffizienten zur Berechnung von BSCR (oben) und SCR_{Life} (unten).

	Market	Default	Life	Health	Non-Life
Market	1				
Default	0,25	1			
Life	0,25	0,25	1		
Health	0,25	0,25	0,25	1	
Non-Life	0,25	0,5	0	0	1

	Mortality	Longevity	Disability	Lapse	Expenses	Revision	CAT
Mortality	1						
Longevity	-0,25	1					
Disability	0,25	0	1				
Lapse	0	0,25	0	1			
Expenses	0,25	0,25	0,5	0,5	1		
Revision	0	0,25	0	0	0,5	1	
CAT	0,25	0	0,25	0,25	0,25	0	1

Für Einzelheiten zur Standardrisikoformel in Solvency II siehe z.B. KRIELE-WOLF (2012), Abschnitt 4.6.2.

Abschnitt 9.3

Warum Copulas?

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.3 Warum Copulas?

Ein relativ neuer Ansatz zur Modellierung von stochastischen Abhängigkeiten basiert auf sogenannten **Copulas**. Das Wort „*Copula*“ ist aus dem Lateinischen und bedeutet soviel wie „Bindung/Koppelung“. Es wurde im Jahre 1959 von dem US-amerikanischen Mathematiker ABE SKLAR (*1928) als Bezeichnung für Funktionen eingeführt, mit denen mehrere univariate Verteilungen zu einer multivariaten Verteilung „gekoppelt“ werden können.



Einige der wichtigen Grundlagenresultate für Copulas wurden jedoch bereits einige Jahre zuvor von dem finnischen Statistiker WASSILY Hoeffding (1914–1991) und dem französischen Mathematiker MAURICE FRÉCHET (1878–1973) entdeckt.



Der erste Artikel, der Copulas explizit mit der Untersuchung von **stochastischen Abhängigkeiten** zwischen mehreren Zufallsvariablen in Zusammenhang brachte, ist SCHWEIZER-WOLFF (1981). Seit dieser Veröffentlichung hat sich die Modellierung von stochastischen Abhängigkeiten mit Hilfe von Copulas zu einem Gebiet intensiver Forschungsaktivitäten entwickelt und die Literatur zu Copulas hat sich geradezu explosionsartig vermehrt.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.3 Warum Copulas?

Jede multivariate Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ eines Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ enthält alle Informationen über die Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ der einzelnen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ sowie über deren Abhängigkeiten untereinander. Die **Attraktivität des Copula-Ansatzes** liegt vor allem darin begründet, dass mit seiner Hilfe im Falle von stetigen Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ die Modellierung der Abhängigkeitsstruktur zwischen $X_1, \dots, X_n$ von der Modellierung der Randverteilungsfunktionen dieser Zufallsvariablen **isoliert** werden kann.

D.h. für eine gegebene Problemstellung kann die Bestimmung einer geeigneten multivariaten Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ mit stetigen Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ in **zwei unabhängige Schritte** zerlegt werden:

- 1) Wahl von stetigen Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ und
- 2) Verbindung dieser univariaten Verteilungsfunktionen mittels einer geeigneten Copula zu einer multivariaten Verteilungsfunktion mit der gewünschten Abhängigkeitsstruktur.

Da man bei der Wahl der stetigen Randverteilungen $F_1, \dots, F_n$ völlig frei ist, bieten Copulas bei der Modellierung von stochastischen Abhängigkeiten eine große **Flexibilität**. Sie kommen daher mittlerweile in vielen verschiedenen Anwendungsgebieten zum Einsatz.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.3 Warum Copulas?

Darüber hinaus besitzt der Einsatz von Copulas weitere Vorteile:

- Sie tragen zum **Verständnis von Abhängigkeitsstrukturen** über lineare Korrelationen hinaus bei und helfen damit insbesondere bei der Vermeidung von Trugschlüssen.
- Mit ihrer Hilfe lassen sich **Abhängigkeitsmaße mit nützlichen Eigenschaften** definieren.
- Sie erlauben die **Modellierung großer Tailabhängigkeiten**.

Bei der Verwendung von Copulas ist jedoch auch **Vorsicht** geboten. Zum Beispiel ist es aufgrund der Komplexität des Problems in der Praxis so gut wie nicht möglich, für die in den Daten vorhandenen Abhängigkeiten eine „optimale“ Copula zu finden. Ferner besteht bisher ein Mangel an **geeigneten Anpassungstests**. Es ist daher häufig unklar, ob eine gute Anpassungsgüte bei den Randverteilungen und der Copula auch zu einer guten Anpassungsgüte bei der dadurch erzeugten multivariaten Verteilung führt.

Weitere im Zusammenhang mit Copulas oft genannte **Kritikpunkte** sind:

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

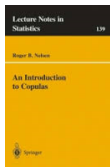
9.3 Warum Copulas?

- Copulas verleiten zum **Irrglauben**, dass sich mit ihnen das Problem der Modellierung stochastischer Abhängigkeiten leicht lösen lässt.
- Im Falle von $n \geq 3$ führt der **Fluch der Dimensionalität**, also der Sachverhalt, dass das Volumen eines Raumes und damit die Anzahl an benötigten Beobachtungen für sinnvolle statistische Aussagen mit der Anzahl an Dimensionen exponentiell ansteigt, bei der Anpassung von Copulas schnell zu großen Problemen.
- Die Zerlegung des Problems der Bestimmung einer geeigneten multivariaten Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ in die zwei unabhängigen Schritte 1) und 2) führt bei der Modellanpassung zu einer **höheren statistischen Unsicherheit** als die direkte Modellierung von $F_{\mathbf{X}}$.
- Copulas sind **statische Modelle** und daher nicht zur Modellierung zeitlicher Abhängigkeiten in stochastischen Prozessen und Zeitreihen geeignet.
- Häufig basiert die Verwendung bestimmter Copulas (z.B. Gauß-Copula) **weniger auf praxisorientierten Aspekten**, sondern vor allem auf deren guten „mathematischen Handhabbarkeit“.

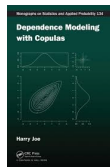
9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.3 Warum Copulas?

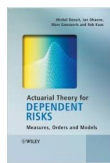
Fazit: Die Theorie der Copulas kann das Problem der Abhängigkeitsmodellierung nicht vollständig lösen, aber sie ist in vielerlei Hinsicht nützlich und sie strukturiert das Problem der Abhängigkeitsmodellierung. Auch wenn es i.d.R. unmöglich ist, für einen gegebenen Datensatz die „optimale“ Copula zu finden, so ist es dennoch besser, vorhandene Abhängigkeiten in den Daten wenigstens im Ansatz durch eine geeignete Copula zu beschreiben, als die Abhängigkeiten einfach zu ignorieren oder sie vereinfachend als linear zu unterstellen.



Im Folgenden wird eine kurz Einführung in die wichtigsten Grundlagen der Theorie der Copulas gegeben. Eine umfassende Darstellung ist z.B. in den Monographien NELSEN (1999) und JOE (2014) zu finden.



Für eine Reihe von Anwendungen speziell in der Schadenversicherungsmathematik siehe z.B. die Artikel FREES-VALDEZ (1998) und KLUGMAN-PARSA (1999) sowie die Monographien MCNEIL ET AL. (2005), DENUIT ET AL. (2005) und LINDNER (2007).



Abschnitt 9.4

Theorem von Sklar

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Im Folgenden wird der n -dimensionale Zufallsvektor

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$$

mit den Randverteilungsfunktionen

$$F_{X_1}, \dots, F_{X_n} \quad (7)$$

betrachtet. Die Abhängigkeitsstruktur zwischen den n Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ wird bekanntlich durch ihre **gemeinsame Verteilungsfunktion**

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad \text{für } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

vollständig beschrieben. Da Verteilungsfunktionen monoton wachsend sind, folgt daraus

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{P}(F_{X_1}(X_1) \leq F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(X_n) \leq F_{X_n}(x_n)) \\ &=: C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \end{aligned} \quad (9)$$

für $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (vgl. Abschnitt 10.3). Die reellwertige Funktion

$$C : [0, 1]^n \longrightarrow [0, 1], \quad (u_1, \dots, u_n) \mapsto C(u_1, \dots, u_n) \quad (10)$$

in (9) wird als **Copula** bezeichnet.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Die Copula C ist somit eine mehrdimensionale Funktion C , die einen **funktionalen Zusammenhang** zwischen den Randverteilungsfunktionen (7) der einzelnen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ und der gemeinsamen Verteilungsfunktion (8) des Zufallsvektors $\mathbf{X}$ herstellt. D.h. sie gibt an, wie die gemeinsame Wahrscheinlichkeit

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

aus den Wahrscheinlichkeiten

$$F_{X_1}(x_1) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1), \dots, F_{X_n}(x_n) = \mathbb{P}(X_n \leq x_n)$$

berechnet wird. Mit anderen Worten: Durch die Copula C werden die Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ zur gemeinsamen Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ „gekoppelt“ und die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ wird von den Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ separiert.

Wird zusätzlich angenommen, dass die n Randverteilungsfunktionen (7) **stetig** sind, folgt aus dem **Probability Integral Transformation Theorem**

$$F_1(X_1), \dots, F_n(X_n) \sim U(0, 1),$$

wobei $U(0, 1)$ die **Gleichverteilung auf dem Einheitsintervall $(0, 1)$** bezeichnet (vgl. Abschnitt 10.3).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Mit

$$U_i := F_{X_i}(X_i) \sim U(0, 1) \quad \text{und} \quad u_i := F_{X_i}(x_i) \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

folgt dann aus (9)

$$C(u_1, \dots, u_n) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n).$$

Die Copula (10) ist somit die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors

$$(U_1, \dots, U_n)^T \quad \text{mit} \quad U_1, \dots, U_n \sim U(0, 1).$$

Dies führt zu der folgenden Definition:

Definition (Copula)

Eine n -dimensionale Copula C ist eine Verteilungsfunktion auf dem n -dimensionalen Einheitsintervall $[0, 1]^n$, deren n Randverteilungsfunktionen alle Gleichverteilungen auf dem eindimensionalen Einheitsintervall $(0, 1)$ sind.

Der Bedeutung von Copulas wird im folgenden **Theorem von Sklar** zusammengefasst. Es gibt u.a. an, wie mit Hilfe von Copulas aus univariaten Randverteilungsfunktionen multivariate Verteilungsfunktionen konstruiert werden können:



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Theorem (Sklar (1959))

- a) Es sei $F_{\mathbf{X}}$ eine multivariate Verteilungsfunktion mit den n Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$. Dann existiert eine Copula $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, so dass

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)) \quad (11)$$

für $x_1, \dots, x_n \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ gilt. Sind $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ stetig, ist C eindeutig bestimmt und für $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ gegeben durch

$$C(u_1, \dots, u_n) = F_{\mathbf{X}}(F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n)). \quad (12)$$

Dabei ist $F_{X_i}^{-1}(q) := \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F_{X_i}(x) \geq q\} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F_{X_i}(x) < q\}$ die verallgemeinerte Inverse (Quantilfunktion) von F_{X_i} für $i = 1, \dots, n$.

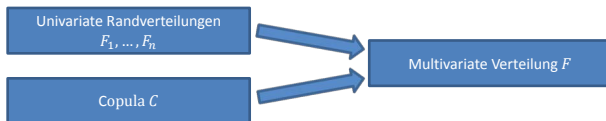
- b) Ist $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ eine Copula und sind $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ univariate Randverteilungsfunktionen, dann ist die durch (11) definierte Funktion $F_{\mathbf{X}}$ eine multivariate Verteilungsfunktion mit den Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$.

Beweis: Die Existenz von C wurde im Wesentlichen bereits weiter oben gezeigt. Für den Beweis der Eindeutigkeit von C im Falle stetiger Randverteilungsfunktionen sowie von Aussage b), siehe z.B. McNEIL ET AL. (2005), Seite 187.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Die Formel (11) besagt, wie durch Wahl von univariaten Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ und anschließender Wahl einer Copula C in zwei getrennten Schritten eine multivariate Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ mit den Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ konstruiert werden kann.



Umgekehrt besagt (12), wie aus einer multivariaten Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ mit stetigen Randverteilungsfunktionen und den verallgemeinerten Inversen $F_{X_1}^{-1}, \dots, F_{X_n}^{-1}$ dieser Randverteilungsfunktionen eine Copula C resultiert.

Die Copula in (11) wird als **Copula der Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$** und als **Copula des Zufallsvektors $\mathbf{X}$** bezeichnet.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Eine Copula kann äquivalent auch als eine Funktion $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ mit den folgenden drei **analytischen Eigenschaften** definiert werden:

- a) $C(u_1, \dots, u_n)$ ist bzgl. jeder Komponente u_i monoton wachsend.
- b) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $u_i \in [0, 1]$.
- c) Für alle $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ mit $a_i \leq b_i$ gilt

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_n} C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0, \quad (13)$$

wobei $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für alle $j = 1, \dots, n$.

Die Eigenschaft a) muss jede multivariate Verteilungsfunktion aufweisen und b) impliziert, dass alle n Randverteilungen Gleichverteilungen auf $(0, 1)$ sind. Die Eigenschaft c) ist die sog. **Rechtecksungleichung**. Sie stellt sicher, dass für einen Zufallsvektor $(U_1, \dots, U_n)^T$ mit der Verteilungsfunktion C stets

$$\mathbb{P}(a_1 \leq U_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq U_n \leq b_n) \geq 0$$

gilt.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

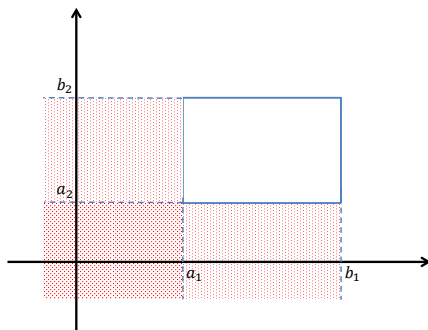
9.4 Theorem von Sklar

Mit (13) erhält man z.B. für eine **bivariate Copula** $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

$$\mathbb{P}(a_1 \leq U_1 \leq b_1, a_2 \leq U_2 \leq b_2) = C(b_1, b_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) + C(a_1, a_2) \geq 0$$

für alle $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in [0, 1]^2$ mit $a_1 \leq b_1$ und $a_2 \leq b_2$.

Dies lässt sich wie folgt graphisch veranschaulichen:



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Bemerkungen:

- Da Copulas multivariate Verteilungsfunktionen sind, folgt unmittelbar, dass jede **Konvexkombination** $\lambda C_1 + (1 - \lambda)C_2$ mit $\lambda \in [0, 1]$ zweier Copulas C_1 und C_2 selbst wieder eine Copula ist.
- Bei einer n -dimensionalen Copula C sind alle **k -dimensionalen Randverteilungen** für $2 \leq k \leq n - 1$ ebenfalls wieder Copulas.
- Aus (12) wird auch ersichtlich, dass durch Copulas Abhängigkeiten auf einer **Quantilskala** ausgedrückt werden. Denn der Wert $C(u_1, \dots, u_n)$ gibt die gemeinsame Wahrscheinlichkeit an, dass X_1 unterhalb seines u_1 -Quantils, X_2 unterhalb seines u_2 -Quantils usw. liegt. Dies ist für das Quantitative Risikomanagement und besonders für die Betrachtung von Extremszenarien nützlich.
- Der Copula-Ansatz funktioniert für **nichtstetige Randverteilungsfunktionen** $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ nicht zufriedenstellend. In diesem Fall entstehen eine Reihe von technischen Problemen, wie z.B. die fehlende Eindeutigkeit von C usw. (vgl. hierzu z.B. GENEST-NEŠLEHOVÁ (2007)).
- I.A. gibt es keine theoretische Rechtfertigung für die Verwendung einer bestimmten Copula. Die Auswahl einer Copula erfolgt daher i.d.R. wie die Auswahl einer geeigneten Schadenhöhenverteilung indem man die **Anpassungsgüte der Copula** an die vorhandenen Daten untersucht.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Beispiel (Anwendungsbeispiel für bivariate Copulas (1))

Es wird ein Versicherungsunternehmen mit zwei Versicherungsportfolios betrachtet. Durch

$$S_A \sim N(1000, 300^2) \quad \text{und} \quad S_B \sim \Gamma(4, 1/250)$$

seien die jährlichen Gesamtschäden in Portfolio A bzw. B gegeben. Die Geschäftsleitung hat beschlossen jährliche Gesamtschäden größer als der Schwellenwert $u_A = 1500$ (Portfolio A) bzw. $u_B = 1600$ (Portfolio B) in Rückversicherung zu geben. Die Geschäftsleitung möchte daher vom Aktuariat die folgenden Fragen beantwortet haben:

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in Portfolio A bzw. B der jährliche Gesamtschaden jeweils kleiner ist als der Schwellenwert u_A bzw. u_B ?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass simultan in beiden Portfolios der jährliche Gesamtschaden kleiner ist als der jeweilige Schwellenwert u_A bzw. u_B , wenn die beiden jährlichen Gesamtschäden S_A und S_B als stochastisch unabhängig unterstellt werden?

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Beispiel (Fortsetzung)

- c) Wie groß ist in b) die Wahrscheinlichkeit, wenn die beiden jährlichen Gesamtschäden S_A und S_B als stochastisch abhängig unterstellt werden und diese Abhängigkeit durch die sog. bivariate Clayton-Copula

$$C : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1], (u_1, u_2) \mapsto \left(u_1^{-50} + u_2^{-50} - 1 \right)^{-1/50}$$

beschrieben wird (vgl. Abschnitt 9.8).

- d) Wie hoch ist die maximal mögliche Wahrscheinlichkeit, dass simultan in beiden Portfolios der jährliche Gesamtschaden kleiner ist als der jeweilige Schwellenwert u_A bzw. u_B ?
- e) Was ist eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass simultan in beiden Portfolios der jährliche Gesamtschaden kleiner ist als der jeweilige Schwellenwert u_A bzw. u_B ?

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Beispiel (Fortsetzung)

Zu a) Die beiden Wahrscheinlichkeiten betragen (vgl. Abschnitt 4.7):

$$\mathbb{P}(S_A \leq u_A) = \Phi\left(\frac{1500 - 1000}{300}\right) = 0,95221$$

$$\mathbb{P}(S_B \leq u_B) = \int_0^\infty \frac{(1/250)^4}{\Gamma(4)} y^3 e^{-y/250} dy = \dots = 0,88108$$

Zu b) Die Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$\mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B) = \mathbb{P}(S_A \leq u_A) \mathbb{P}(S_B \leq u_B) = 0,95221 \cdot 0,88108 = 0,83898$$

Zu c) Die Wahrscheinlichkeit beträgt (vgl. (11)):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B) &= C(F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)) \\ &= C(\mathbb{P}(S_A \leq u_A), \mathbb{P}(S_B \leq u_B)) \\ &= \left(0,95221^{-50} + 0,88108^{-50} - 1\right)^{-1/50} = 0,88075\end{aligned}$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Beispiel (Fortsetzung)

Zu d) Es gilt:

$$\mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B) = \mathbb{P}(S_A \leq u_A | S_B \leq u_B) \mathbb{P}(S_B \leq u_B) \leq \mathbb{P}(S_B \leq u_B)$$

$$\mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B) = \mathbb{P}(S_B \leq u_B | S_A \leq u_A) \mathbb{P}(S_A \leq u_A) \leq \mathbb{P}(S_A \leq u_A)$$

Daraus folgt, dass

$$\mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B) \leq \min \{ \mathbb{P}(S_A \leq u_A), \mathbb{P}(S_B \leq u_B) \} = 0,88108$$

gelten muss. Da es sich jedoch bei $C(u_1, u_2) = \min \{u_1, u_2\}$ um eine Copula handelt (vgl. Abschnitt 9.6), ist in diesem Beispiel 0,88108 der maximal mögliche Wert für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B)$. D.h. je nach verwendeter Copula (Abhängigkeitsstruktur zwischen S_A und S_B) resultieren für $\mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B)$ Werte kleiner oder gleich 0,88108.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.4 Theorem von Sklar

Beispiel (Fortsetzung)

Zu e) Es gilt:

$$\mathbb{P}(S_A \leq u_A \text{ oder } S_B \leq u_B) = \mathbb{P}(S_A \leq u_A) + \mathbb{P}(S_B \leq u_B) - \mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B) \leq 1$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B) &\geq \mathbb{P}(S_A \leq u_A) + \mathbb{P}(S_B \leq u_B) - 1 \\ &= 0,95221 + 0,88108 - 1 = 0,83329 \end{aligned}$$

D.h. die Wahrscheinlichkeit, dass simultan in beiden Portfolios der jährliche Gesamtschaden kleiner ist als der jeweilige Schwellenwert u_A bzw. u_B beträgt mindestens 0,83329. Da es sich jedoch bei $C(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$ um eine Copula handelt (vgl. Abschnitt 9.6) ist in diesem Beispiel 0,83329 der minimal mögliche Wert für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B)$. D.h. je nach verwendeter Copula (Abhängigkeitsstruktur zwischen S_A und S_B) resultieren für $\mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B)$ Werte größer oder gleich 0,83329.

Abschnitt 9.5

Eigenschaften von Copulas

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.5 Eigenschaften von Copulas

Copulas besitzen die wichtige Eigenschaft, dass die durch sie implizierte Abhängigkeitsstruktur **invariant ist bzgl. streng monoton wachsenden Transformationen**:

Satz (Invarianzeigenschaft)

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor mit stetigen Randverteilungsfunktionen und Copula C . Dann besitzt der Zufallsvektor $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))^T$ für streng monoton wachsende Transformationen $T_1, \dots, T_n$ ebenfalls die Copula C .

Beweis: Siehe z.B. MCNEIL ET AL. (2005), Seite 188. ■

Dieses Resultat besagt, dass sich die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ nicht verändert, wenn sie streng monoton wachsenden Transformationen $T_1, \dots, T_n$ unterzogen werden. Dies resultiert aus der Tatsache, dass die Copula C die **Abhängigkeiten zwischen den Quantilen** von $X_1, \dots, X_n$ modelliert und diese Abhängigkeitsstruktur bei streng monoton wachsenden Transformationen erhalten bleibt. D.h. die transformierten Zufallsvariablen $T_1(X_1), \dots, T_n(X_n)$ weisen die gleiche Abhängigkeitsstruktur auf. Die Randverteilungsfunktionen verändern sich jedoch, da sie an die neuen Skalen angepasst werden müssen. Die Dichtefunktionen von $F_{X_{T_1}}, \dots, F_{X_{T_n}}$ können mit dem Transformationssatz für Dichten berechnet werden (vgl. Abschnitt 4.14) und mit dem Transformationssatz für multivariate Dichten kann die Dichte von $(T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))^T$ (vgl. Abschnitt 8.2) ermittelt werden.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.5 Eigenschaften von Copulas

Für Copulas gelten die folgenden, nach dem französischen Mathematiker MAURICE RENÉ FRÉCHET (1878–1973) benannten, **unteren** und **oberen Fréchet-Schranken**:



Satz (Fréchet-Schranken)

Für eine Copula $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ gelten die beiden folgenden Schranken:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n u_i + 1 - n, 0 \right\} \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq \min \{u_1, \dots, u_n\} \quad (14)$$

Beweis: Es gelte $U_1, \dots, U_n \sim U(0, 1)$. Die erste Ungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &= \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{U_i \leq u_i\}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{U_i > u_i\}\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(U_i > u_i) = 1 - \sum_{i=1}^n (1 - u_i) = \sum_{i=1}^n u_i + 1 - n. \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar $C(u_1, \dots, u_n) \geq \max \{\sum_{i=1}^n u_i + 1 - n, 0\}$. Für die zweite Ungleichung beobachtet man

$$C(u_1, \dots, u_n) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{U_i \leq u_i\}\right) \leq \mathbb{P}(U_i \leq u_i) = u_i \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Daraus folgt unmittelbar $C(u_1, \dots, u_n) \leq \min \{u_1, \dots, u_n\}$.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.5 Eigenschaften von Copulas

Wie sich in Abschnitt 9.6 zeigen wird, besitzen die beiden Fréchet-Schranken jeweils eine **interessante Interpretation bzgl. stochastischer Abhängigkeiten**.

Fréchet-Schranken lassen sich aber nicht nur für Copulas, sondern für jede **multivariate Verteilungsfunktion** ermitteln. Denn ist $F_{\mathbf{X}}$ eine multivariate Verteilungsfunktion mit den Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$, dann erhält man auf analoge Weise:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) + 1 - n, 0 \right\} \leq F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \leq \min \{F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)\}$$

D.h. für eine multivariate Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ kann mit Hilfe ihrer Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ eine untere und obere Schranken angegeben werden.

Da es sich bei Copulas um multivariate Verteilungsfunktionen handelt, besitzen viele von ihnen auch eine **Dichtefunktion**. D.h. es existiert eine **nichtnegative Funktion**

$$c : [0, 1]^n \longrightarrow \mathbb{R}_+, \mathbf{u} \mapsto c(u_1, \dots, u_n)$$

mit der Eigenschaft

$$C(u_1, \dots, u_n) = \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} c(v_1, \dots, v_n) dv_1 \cdots dv_n$$

für alle $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.5 Eigenschaften von Copulas

Zum Beispiel besitzen fast alle **parametrischen Copulas**, wie z.B. die Gauß-, t -, Gumbel-, Clayton- und Frank-Copula (siehe Abschnitte 9.7 und 9.8), eine Dichtefunktion. Beispiele für Copulas, die keine Dichtefunktion besitzen, sind die **Komonotonie-** und **Kontramomonotonie-Copula** (siehe Abschnitt 9.6) keine Dichtefunktion.

Wenn eine Copula C eine Dichtefunktion besitzt und die Copula bekannt ist, kann die Dichtefunktion durch partielles Ableiten bestimmt werden:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \cdots \partial u_n}$$

Zusammen mit (11) erhält man damit für die Dichtefunktion der multivariaten Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ die Darstellung:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = c(u_1, \dots, u_n) \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \quad (15)$$

Dabei entspricht der Term $\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$ bekanntlich der Dichtefunktion von $F_{\mathbf{X}}$, wenn die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ **stochastisch unabhängig** sind. D.h. bei stochastischer Unabhängigkeit von $X_1, \dots, X_n$ gilt $c(u_1, \dots, u_n) = 1$.

Die Dichtefunktion einer Copula wird zum Beispiel bei der Anpassung einer Copula an einen Datensatz mittels der **ML-Methode** benötigt (see Abschnitt 9.12).

Abschnitt 9.6

Fundamentale Copulas

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.6 Fundamentale Copulas

Unter der Bezeichnung **fundamentale Copulas** werden die drei Copulas zusammengefasst, welche jeweils eine der drei folgenden **fundamentalen Abhängigkeitsstrukturen** repräsentieren:

- **Stochastische Unabhängigkeit**
- **Perfekte positive Abhängigkeit**
- **Perfekte negative Abhängigkeit**

a) Die **Unabhängigkeits-Copula** ist gegeben durch

$$\Pi(u_1, \dots, u_n) := \prod_{i=1}^n u_i. \quad (16)$$

Aus (11) folgt unmittelbar, dass Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit stetigen Randverteilungsfunktionen genau dann **stochastisch unabhängig** sind, wenn ihre Abhängigkeitsstruktur durch die Copula (16) repräsentiert wird. Die Unabhängigkeits-Copula (16) besitzt die **Dichtefunktion**

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} = 1.$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.6 Fundamentale Copulas

b) Die **Komonotonie-Copula** ist gegeben durch die obere Fréchet-Schranke

$$M(u_1, \dots, u_n) := \min \{u_1, \dots, u_n\} \quad (17)$$

(vgl. (14)) und besitzt keine Dichtefunktion. Die Komonotonie-Copula (17) ist die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $\mathbf{U} = (U, \dots, U)^T$ mit $U \sim U(0, 1)$. Denn es gilt:

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{U}}(u_1, \dots, u_n) &= \mathbb{P}(U \leq u_1, \dots, U \leq u_n) \\ &= \mathbb{P}(U \leq \min \{u_1, \dots, u_n\}) \\ &= \min \{u_1, \dots, u_n\} \end{aligned}$$

Die Komonotonie-Copula (17) repräsentiert **perfekte positive Abhängigkeit**, d.h. die stärkste Form der positiven Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen. Denn wie man zeigen kann, gibt es für die Komponenten eines Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ mit stetigen Randverteilungsfunktionen und der Komonotonie-Copula M als Copula **streng monoton wachsende Transformationen** T_i mit $X_i = T_i(X_1)$ für $i = 2, \dots, n$ (siehe Abschnitt 9.9). Dies hat z.B. zur Folge, dass wenn X_1 sein q -Quantil als Wert annimmt, auch die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ jeweils ihr q -Quantil als Wert annehmen.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.6 Fundamentale Copulas

- c) Die **Kontramonotonie-Copula** ist gegeben durch die zweidimensionale untere Fréchet-Schranke

$$W(u_1, u_2) := \max \{u_1 + u_2 - 1, 0\} \quad (18)$$

(vgl. (14)) und besitzt ebenfalls keine Dichtefunktion. Für $n \geq 3$ ist die untere Fréchet-Schranke keine Copula, da die Rechtecksungleichung (13) nicht erfüllt ist (vgl. MCNEIL (2005), Seite 200). Die Kontramonotonie-Copula (18) ist die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $\tilde{U} = (U, 1 - U)^T$ mit $U \sim U(0, 1)$.
Denn es gilt:

$$\begin{aligned} F_{\tilde{U}}(u_1, u_2) &= \mathbb{P}(U \leq u_1, 1 - U \leq u_2) \\ &= \mathbb{P}(1 - u_2 \leq U \leq u_1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } u_1 < 1 - u_2 \\ u_1 - (1 - u_2) & \text{für } u_1 \geq 1 - u_2 \end{cases} \\ &= \max \{u_1 + u_2 - 1, 0\} \end{aligned}$$

Die Kontramonotonie-Copula (18) repräsentiert **perfekt negative Abhängigkeit**, d.h. die stärkste Form der negativen Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.6 Fundamentale Copulas

Denn wie man zeigen kann, gibt es für die Komponenten eines Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ mit stetigen Randverteilungsfunktionen und der Kontramonaltonie-Copula W als Copula eine **streng monoton fallende Transformation** T mit $X_2 = T(X_1)$ (siehe Abschnitt 9.9). Dies hat z.B. zur Folge, dass wenn X_1 sein q -Quantil als Wert annimmt, die Zufallsvariable X_2 ihr $(1 - q)$ -Quantil als Wert annimmt. Ferner folgt daraus auch, dass drei oder mehr Zufallsvariablen nicht kontramonalton sein können. Denn sind sowohl X_1 und X_2 als auch X_2 und X_3 kontramonalton, dann sind X_1 und X_3 komonalton.

In der nachfolgenden Abbildung sind für $n = 2$ die drei fundamentalen Copulas zusammen mit ihren Isohöhenliniendiagrammen dargestellt.

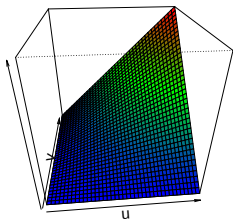
Die Fréchet-Schranken (14) implizieren, dass die Graphen aller bivariaten Copulas $C(u_1, u_2)$ zwischen den Graphen von $M(u_1, u_2)$ und $W(u_1, u_2)$ liegen müssen. D.h. es gilt stets:

$$M(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq W(u_1, u_2)$$

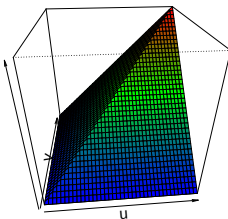
9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.6 Fundamentale Copulas

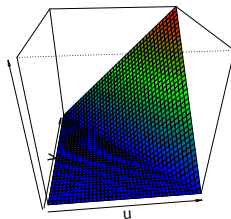
$\Pi(u, v)$



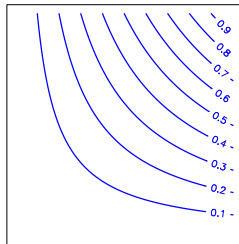
$M(u, v)$



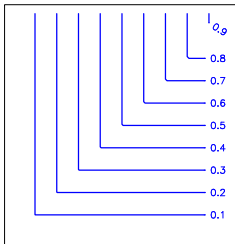
$W(u, v)$



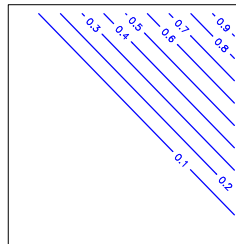
$\Pi(u, v)$



$M(u, v)$



$W(u, v)$



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.6 Fundamentale Copulas

Beispiel (Anwendungsbeispiel für bivariate Copulas (2))

Es wird wieder die Situation des Beispiels in Abschnitt 9.4 betrachtet. Bei Verwendung der drei fundamentalen Copulas erhält man mit dem Theorem von Sklar für $F_{(S_A, S_B)}(u_A, u_B) = \mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B)$ die folgenden Werte (vgl. (11)):

$$\begin{aligned}\Pi(F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)) &= F_{S_A}(u_A) \cdot F_{S_B}(u_B) \\ &= 0,95221 \cdot 0,88108 = 0,83898\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)) &= \min\{F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)\} \\ &= \min\{0,95221; 0,88108\} = 0,88108\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W(F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)) &= \max\{F_{S_A}(u_A) + F_{S_B}(u_B) - 1, 0\} \\ &= \max\{0,95221 + 0,88108 - 1, 0\} = 0,83329\end{aligned}$$

In den Teilaufgaben d) und e) des Beispiels in Abschnitt 9.4 wurde gezeigt, dass es sich bei $M(F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)) = 0,88108$ und $W(F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)) = 0,83329$ um den maximalen bzw. minimalen Wert für $\mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B)$ handelt.

Abschnitt 9.7

Implizite Copulas

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.7 Implizite Copulas

Unter **impliziten Copulas** versteht man Copulas, die sich **nicht in geschlossener Form** darstellen lassen. Zwei bekannte Beispiele sind die Copula der multivariaten Normalverteilung und die Copula der multivariaten t -Verteilung. Sie werden als **Gauß-** bzw. **t -Copula** bezeichnet und gehören zur Klasse der **elliptischen Copulas**, die aus den Copulas von elliptischen Verteilungen besteht (vgl. Abschnitt 8.5).

Gauß-Copula

Die Copula eines Zufallsvektors mit multivariater Normalverteilung $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ wird als **Gauß-Copula** bezeichnet. Da die Standardisierung der Randverteilungen zu Standardnormalverteilungen der Ausführung streng monoton wachsender Transformationen entspricht, folgt aus der Invarianzeigenschaft (vgl. Abschnitt 9.5), dass der dann resultierende standardisierte Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi})$ mit der Korrelationsmatrix $\boldsymbol{\Psi} = (\rho_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ die gleiche Copula besitzt (bei standardisierten Zufallsvektoren stimmen Korrelationsmatrix und Varianz-Kovarianzmatrix überein). Gemäß des Satzes von Sklar ist daher die **Gauß-Copula** durch

$$C_{\boldsymbol{\Psi}}^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\boldsymbol{\Psi}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \quad (19)$$

gegeben (vgl. (12)), wobei $\Phi_{\boldsymbol{\Psi}}$ die Verteilungsfunktion des standardisierten Zufallsvektors $\mathbf{X}$ und Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.7 Implizite Copulas

Die Gauß-Copula (19) repräsentiert die **Abhängigkeitsstruktur** aller multivariaten Normalverteilungen mit Korrelationsmatrix Ψ . D.h. sind $X_1, \dots, X_n$ beliebig normalverteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim F_{X_i}$ für $i = 1, \dots, n$ und Korrelationsmatrix Ψ , dann folgt mit Aussage b) des Theorems von Sklar, dass $C_{\Psi}^{Ga}(F_1(u_1), \dots, F_n(u_n))$ eine multivariate Normalverteilung $N(\mu, \Sigma)$ ist mit

$$\mu = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n])^T \quad \text{und} \quad \Sigma = \mathbf{D}\Psi\mathbf{D}$$

für $\mathbf{D} := \text{diag}(\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n))$.

Wegen $\rho_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, n$ hängt die Gauß-Copula (19) nur von den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Korrelationskoeffizienten ρ_{ij} mit $i \neq j$ ab. Sie besitzt keine einfache geschlossene Darstellung, sondern lässt sich nur mit Hilfe der Dichtefunktion von $\mathbf{X}$ als n -faches Integral

$$\begin{aligned} C_{\Psi}^{Ga}(u_1, \dots, u_n) &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \cdots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Psi)}} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}(s_1, \dots, s_n)^T \Psi^{-1}(s_1, \dots, s_n)\right) ds_1 \cdots ds_n \end{aligned} \quad (20)$$

darstellen (vgl. Abschnitt 8.3).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.7 Implizite Copulas

Sowohl die **Unabhängigkeits-Copula** Π als auch die **Komonotonie-Copula** M sind **Spezialfälle der Gauß-Copula**. Genauer gilt:

$$\Pi(u_1, \dots, u_n) = C_{\mathbf{E}}^{Ga}(u_1, \dots, u_n)$$

$$M(u_1, \dots, u_n) = \lim_{\Psi \rightarrow \mathbf{I}} C_{\Psi}^{Ga}(u_1, \dots, u_n)$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{E}$ die $n \times n$ -Einheitsmatrix und $\mathbf{I}$ die $n \times n$ -Matrix, die nur aus Einsen besteht.

Aus (20) erhält man für den **bivariaten Fall** $n = 2$ mit $\rho := \rho_{12}$ und $|\rho| < 1$

$$C_{\rho}^{Ga}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-(s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right) ds_1 ds_2$$

und den **Spezialfällen**

$$\Pi(u_1, u_2) = C_0^{Ga}(u_1, u_2)$$

$$M(u_1, u_2) = \lim_{\rho \rightarrow 1} C_{\rho}^{Ga}(u_1, u_2)$$

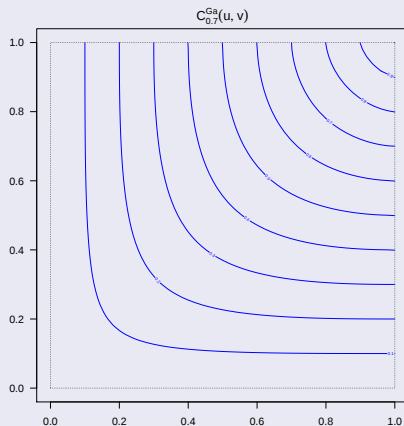
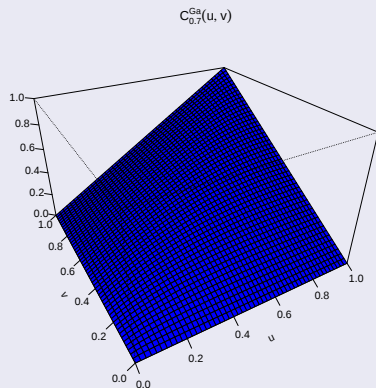
$$W(u_1, u_2) = \lim_{\rho \rightarrow -1} C_{\rho}^{Ga}(u_1, u_2)$$

Bivariate Copulas, welche die drei fundamentalen Copulas als Spezial- bzw. Grenzfälle enthalten, werden als **comprehensive** bezeichnet.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.7 Implizite Copulas

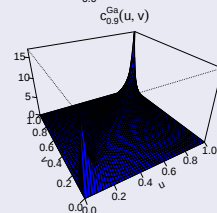
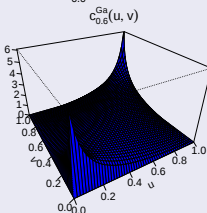
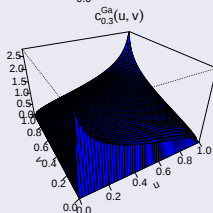
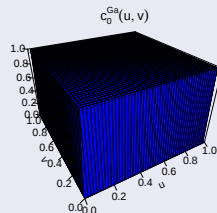
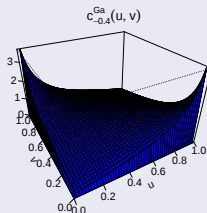
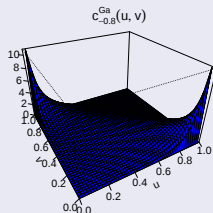
Beispiel (Gauß-Copula)



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.7 Implizite Copulas

Beispiel (Fortsetzung)



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.7 Implizite Copulas

Der chinesische Aktuar DAVID X. LI (*1960) entwickelte Ende der 90er Jahre des letzten Jahrhunderts in seiner Funktion als Risikomanager der US-Investmentbank JPMorgan ein auf der zweidimensionalen Gauß-Copula basierendes stochastisches Modell zur Modellierung von linearen Korrelationen zwischen den **Ausfallwahrscheinlichkeiten von Kreditrisiken**. Wegen seiner Einfachheit hat sich dieses Modell nach seiner Veröffentlichung im Jahr 2000 bei Banken, Investoren, Rating-Agenturen und Aufsichtsbehörden als eine Art „**Industriestandard**“ für das Pricing von sehr komplexen Kreditderivaten, wie z.B. CDOs (collateralized debt obligation) bestehend aus einem Portfolio von Immobilienkrediten, etabliert. Die Warnungen bzgl. der vielen großen Schwächen dieses Modells (z.B. konstante Korrelationen, keine Tailabhängigkeiten usw.) wurden jedoch weitgehend ignoriert.



Nach der Subprime-Krise 2007–2009 wurde neben der Verschleierung von Risiken durch Verbriefung und Tranchierung von Krediten sowie der irreführenden Rolle der Rating-Agenturen häufig die große Unzulänglichkeit der Gauß-Copula bzgl. der Erfassung von Risiken in extremen Marktphasen als eine der Hauptursachen für die Subprime-Krise ausgemacht. Siehe hierzu z.B. den Artikel von Felix Salomon im „Wired Magazine“ am 23. Februar 2009 mit dem Titel „*Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street*“.

THE
SECRET FORMULA
That Destroyed Wall Street

$$\mathbf{P} = \Phi(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \gamma)$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.7 Implizite Copulas

$$\Pr[T_A < 1, T_B < 1] = \Phi_2(\Phi^{-1}(F_A(1)), \Phi^{-1}(F_B(1)), \gamma)$$

Here's what killed your 401(k) *David X. Li's Gaussian copula function as first published in 2000. Investors exploited it as a quick—and fatally flawed—way to assess risk. A shorter version appears on this month's cover of Wired.*

Probability

Specifically, this is a joint default probability—the likelihood that any two members of the pool (A and B) will both default. It's what investors are looking for, and the rest of the formula provides the answer.

Copula

This couples (hence the Latin term copula) the individual probabilities associated with A and B to come up with a single number. Errors here massively increase the risk of the whole equation blowing up.

Survival times

The amount of time between now and when A and B can be expected to default. Li took the idea from a concept in actuarial science that charts what happens to someone's life expectancy when their spouse dies.

Distribution functions

The probabilities of how long A and B are likely to survive. Since these are not certainties, they can be dangerous: Small miscalculations may leave you facing much more risk than the formula indicates.

Equality

A dangerously precise concept, since it leaves no room for error. Clean equations help both quants and their managers forget that the real world contains a surprising amount of uncertainty, fuzziness, and precariousness.

Gamma

The all-powerful correlation parameter, which reduces correlation to a single constant—something that should be highly improbable, if not impossible. This is the magic number that made Li's copula function irresistible.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.7 Implizite Copulas

b) t -Copula

Die Copula eines Zufallsvektors mit multivariater t -Verteilung wird als **t -Copula** bezeichnet. Aus der Invarianzeigenschaft von Copulas (vgl. Abschnitt 9.5) folgt wieder, dass der nach Standardisierung der Randverteilungen resultierende Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T \sim t_v(\mathbf{0}, \Psi)$ mit der Korrelationsmatrix $\Psi = (\rho_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ die gleiche Copula besitzt. Gemäß des Satzes von Sklar ist daher die t -Copula durch

$$C_{v,\Psi}^t(u_1, \dots, u_n) = \mathbf{t}_{v,\Psi}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)) \quad (21)$$

gegeben (vgl. (12)), wobei $\mathbf{t}_{v,\Psi}$ die Verteilungsfunktion des standardisierten Zufallsvektors $\mathbf{X}$ und t_v die Verteilungsfunktion der standardisierten univariaten t -Verteilung mit $v \in \mathbb{N}$ Freiheitsgraden bezeichnet.

Die t -Copula (21) repräsentiert die **Abhängigkeitsstruktur** aller multivariaten t -Verteilungen mit Korrelationsmatrix Ψ und v Freiheitsgraden. Wegen $\rho_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, n$ hängt die t -Copula (21) nur von den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Korrelationskoeffizienten ρ_{ij} mit $i \neq j$ und dem Freiheitsgrad v ab. Analog zur Gauß-Copula besitzt sie keine einfache geschlossene Darstellung, sondern lässt sich nur mit Hilfe der Dichtefunktion von $\mathbf{X}$ als n -faches Integral darstellen.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.7 Implizite Copulas

Die **Komonotonie-Copula** M ist ein **Spezialfall der t -Copula**. Genauer gilt:

$$M(u_1, \dots, u_n) = \lim_{\Psi \rightarrow \mathbf{I}} C_{v, \Psi}^t(u_1, \dots, u_n)$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{I}$ wieder die $n \times n$ -Matrix, die nur aus Einsen besteht. Im Gegensatz zur Gauß-Copula resultiert jedoch für $\Psi = \mathbf{E}$ nicht mehr die Unabhängigkeitscopula Π , da unkorrelierte Komponenten eines multivariat t -verteilten Zufallsvektors nicht stochastisch unabhängig sind.

Die t -Copula weist den Ecken von $[0, 1]^n$ mehr Wahrscheinlichkeitsmasse als die Gauß-Copula zu (vgl. übernächste Abbildung, obere Zeile). Dies ist eine Folge der vorhandenen **unteren** und **oberen Tail-Abhängigkeiten** bei t -Copulas (siehe Abschnitt 9.7). Wie man zeigen kann, **konvergiert** die t -Copula für $v \rightarrow \infty$ gegen die Gauß-Copula mit gleicher Korrelationsmatrix Ψ (vgl. übernächste Abbildung, untere Zeile).

Für den **bivariaten Fall** $n = 2$ und $\rho := \rho_{12}$ mit $|\rho| < 1$ erhält man

$$C_{v, \rho}^t(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s_1^2 - 2\rho s_1 s_2 + s_2^2}{v(1-\rho^2)} \right)^{-\frac{v+2}{2}} ds_1 ds_2$$

mit dem **Spezialfall**:

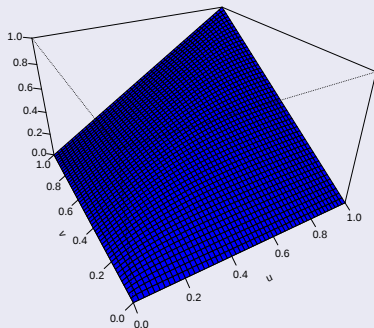
$$\lim_{\rho \rightarrow 1} C_{v, \rho}^t(u_1, u_2) = M(u_1, u_2)$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

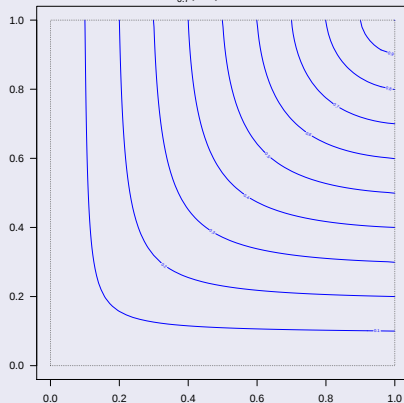
9.7 Implizite Copulas

Beispiel (t -Copula)

$C_{0.7}^t(u, v)$ mit $v = 4$



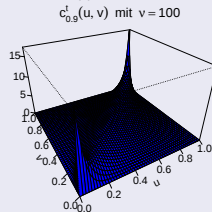
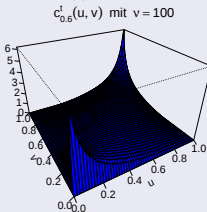
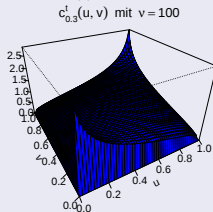
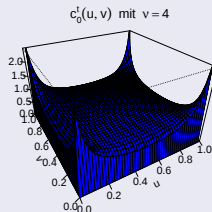
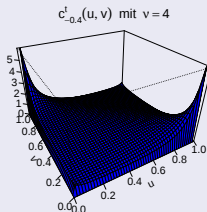
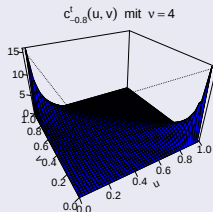
$C_{0.7}^t(u, v)$ mit $v = 4$



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.7 Implizite Copulas

Beispiel (Fortsetzung)



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.7 Implizite Copulas

Beispiel (Anwendungsbeispiel für bivariate Copulas (3))

Es wird wieder die Situation des Beispiels in Abschnitt 9.4 betrachtet. Bei Verwendung der bivariaten Gauß-Copula mit Korrelationskoeffizient $\rho = 0,9$ und der bivariaten t -Copula mit Korrelationskoeffizient $\rho = 0,9$ und $\nu = 5$ Freiheitsgraden erhält man mit dem Theorem von Sklar für $F_{(S_A, S_B)}(u_A, u_B) = \mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B)$ die folgenden Werte (vgl. (11)):

$$C_{0,9}^{Ga}(F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)) = C_{0,9}^{Ga}(0,95221; 0,88108)$$

$$\approx 0,87660$$

$$C_{5;0,9}^t(F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)) = C_{5;0,9}^t(0,95221; 0,88108)$$

$$\approx 0,87710$$

Abschnitt 9.8

Explizite Copulas

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Als **explizite Copulas** bezeichnet man Copulas, die sich in **geschlossener Form** darstellen lassen und häufig auf mathematischen Konstruktionsverfahren basieren, von denen man weiß, dass sie zu Copulas führen. Die folgenden drei Copulas sind bekannte Beispiele für explizite Copulas:

- a) **Gumbel-Hougaard-Copula**
- b) **Cook-Johnson-Copula**
- c) **Frank-Copula**

Diese drei Copulas gehören zur Klasse der sog. **Archimedischen Copulas**, die sich dadurch auszeichnen, dass sie mathematisch leicht zu handhaben sind. Zum Beispiel lassen sich aus ihnen sehr einfach Zufallszahlen generieren, so dass sie sich gut für **Monte-Carlo-Simulationen** eignen. Ferner besitzen sie **nur einen Parameter**, so dass sich mit ihnen stochastische Abhängigkeiten in beliebig großen Dimensionen mit nur einem Parameter modellieren lassen, der zudem die Stärke der Abhängigkeit reguliert.

Archimedische Copulas werden z.B. häufig zur **Modellierung von Kreditrisiken** eingesetzt.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

a) Gumbel-Hougaard-Copula

Die **Gumbel-Hougaard-Copula** ist nach dem deutsch-amerikanischen Mathematiker EMIL J. GUMBEL (1891–1966) und dem dänischen Statistiker PHILIPP HOUGAARD bezeichnet und gegeben durch

$$C_{\theta}^{Gu}(u_1, \dots, u_n) = \exp \left(- \left((-\ln(u_1))^{\theta} + \dots + (-\ln(u_n))^{\theta} \right)^{1/\theta} \right) \quad \text{für } \theta \in [1, \infty).$$

Für den **bivariaten Fall** $n = 2$ wird für gewöhnlich die Bezeichnung **Gumbel-Copula** verwendet.

Die **Unabhängigkeits-Copula** Π und die **Komonotonie-Copula** M sind **Spezialfälle** der Gumbel-Hougaard-Copula. Genauer gilt:

$$\Pi(u_1, \dots, u_n) = C_1^{Gu}(u_1, \dots, u_n)$$

$$M(u_1, \dots, u_n) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}^{Gu}(u_1, \dots, u_n)$$



Bemerkungen:

- Die Gumbel-Hougaard- und Gauß-Copula **ähneln sich sehr stark** (vgl. folgende Abbildung). Die von ihnen repräsentierten Anhängigkeitsstrukturen sind jedoch sehr verschieden.

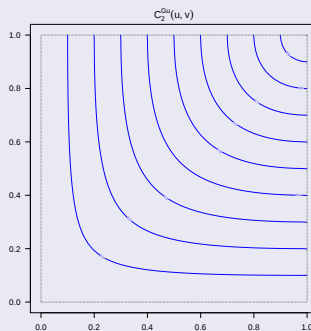
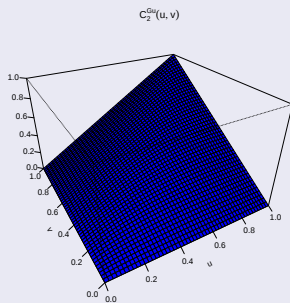
9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Bemerkungen (Fortsetzung):

- Der Parameter θ steuert die **Stärke der stochastischen Abhängigkeit**, welche von stochastischer Unabhängigkeit ($\theta = 1$) bis hin zur perfekten positiven Abhängigkeit reicht ($\theta \rightarrow \infty$) (vgl. übernächste Abbildung).

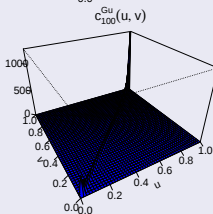
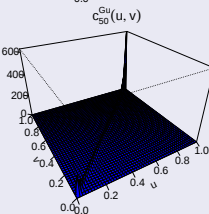
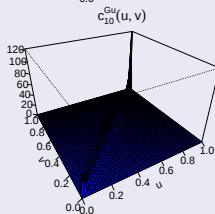
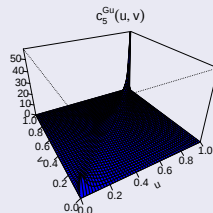
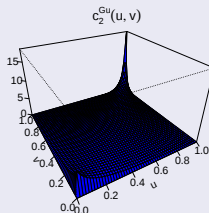
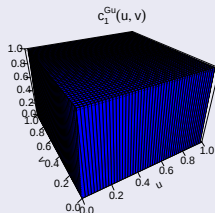
Beispiel (Bivariate Gumbel-Copula)



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Beispiel (Fortsetzung)



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

b) Cook-Johnson-Copula

Die **Cook-Johnson-Copula** ist nach den beiden US-amerikanischen Mathematikern R. DENNIS COOK und MARK E. JOHNSON bezeichnet und gegeben durch

$$C_{\theta}^{Cl}(u_1, \dots, u_n) = \left(u_1^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - n + 1 \right)^{-1/\theta} \quad \text{für } \theta \in (0, \infty).$$

Im **bivariaten Fall** $n = 2$ ist die Copula sogar für $\theta \in [-1, \infty)$ definiert. Sie wird nach dem britischen Statistiker DAVID CLAYTON als **Clayton-Copula** bezeichnet, weshalb hier die Notation C_{θ}^{Cl} verwendet wird.



Die **Unabhängigkeits-Copula** Π und die **Komonotonie-Copula** M sind **Spezialfälle** der Cook-Johnson-Copula. Im bivariaten Fall $n = 2$ ist auch die **Kontramomonotonie-Copula** ein Spezialfall. Genauer gilt

$$W(u_1, u_2) = C_{-1}^{Cl}(u_1, u_2)$$

$$\Pi(u_1, \dots, u_n) = \lim_{\theta \rightarrow 0} C_{\theta}^{Cl}(u_1, \dots, u_n)$$

$$M(u_1, \dots, u_n) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}^{Cl}(u_1, \dots, u_n)$$

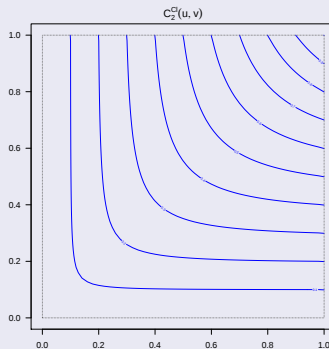
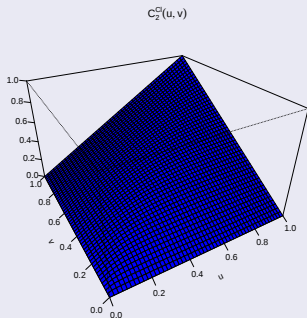
(siehe Übungsaufgaben).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Der Parameter θ steuert wieder die **Stärke der stochastischen Abhängigkeit**, welche im bivariaten Fall $n = 2$ von perfekter negativer Abhängigkeit ($\theta = -1$) über stochastische Unabhängigkeit ($\theta \rightarrow 0$) bis hin zur perfekten positiven Abhängigkeit ($\theta \rightarrow \infty$) reicht (vgl. übernächste Abbildung).

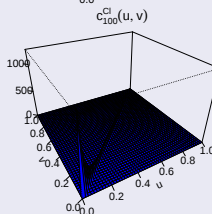
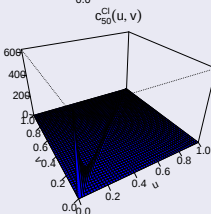
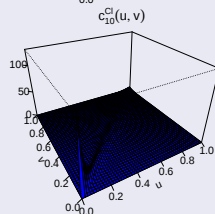
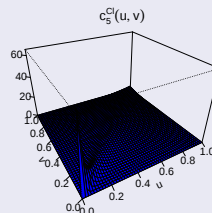
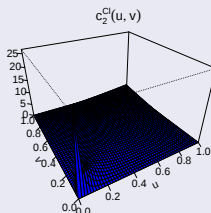
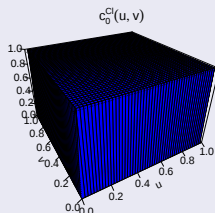
Beispiel (Bivariate Clayton-Copula)



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Beispiel (Fortsetzung)



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

c) Frank-Copula

Die **Frank-Copula** ist nach dem US-amerikanischen Mathematiker M. J. FRANK bezeichnet und gegeben durch

$$C_{\theta}^F(u_1, \dots, u_n) = -\ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1) \cdots (e^{-\theta u_n} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad \text{für } \theta \in (0, \infty).$$

Im **bivariaten Fall** $n = 2$ ist die Frank-Copula sogar für $\theta \in \mathbb{R}$ definiert.

Die **Komonotonie-Copula** M ist ein **Spezialfall** der Frank-Copula. Im bivariaten Fall $n = 2$ sind auch die **Unabhängigkeits-Copula** und die **Kontramonotonie-Copula** Spezialfälle. Genauer gilt:

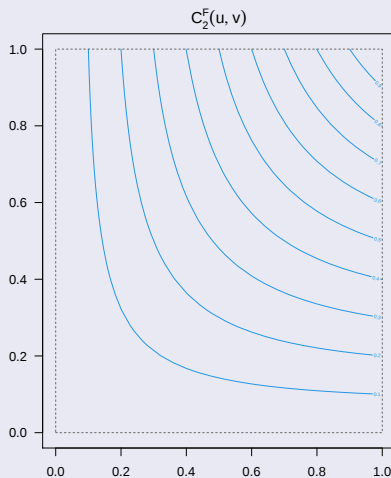
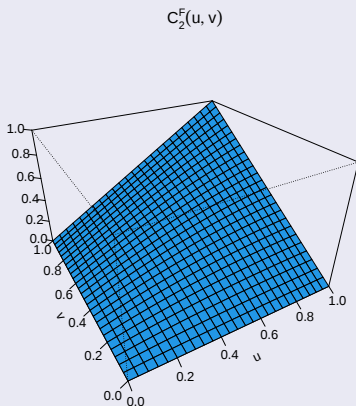
$$\begin{aligned} \Pi(u_1, u_2) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} C_{\theta}^F(u_1, u_2), & W(u_1, u_2) &= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} C_{\theta}^F(u_1, u_2) \\ M(u_1, \dots, u_n) &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}^F(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Auch hier steuert der Parameter θ wieder die **Stärke der stochastischen Abhängigkeit**, welche im bivariaten Fall $n = 2$ von perfekter negativer Abhängigkeit ($\theta \rightarrow -\infty$) über stochastische Unabhängigkeit ($\theta \rightarrow 0$) bis hin zur perfekten positiven Abhängigkeit reicht ($\theta \rightarrow \infty$) (vgl. übernächste Abbildung).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

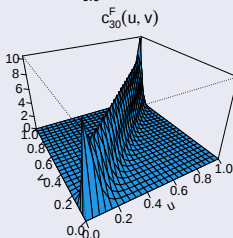
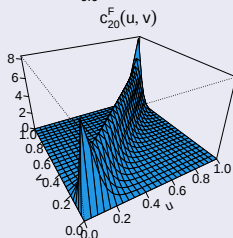
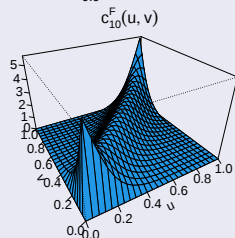
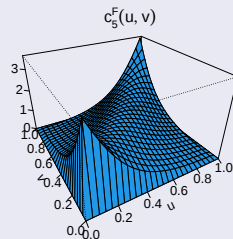
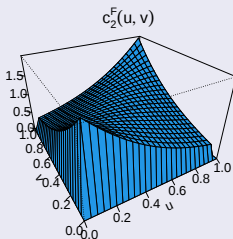
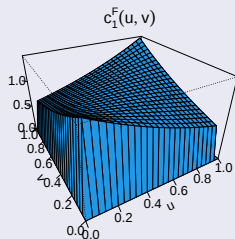
Beispiel (Bivariate Clayton-Copula)



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Beispiel (Fortsetzung)



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Beispiel (Anwendungsbeispiel für bivariate Copulas (4))

Es wird wieder die Situation des Beispiels in Abschnitt 9.4 betrachtet. Bei Verwendung der bivariaten Gumbel-, Clayton- und Frank-Copula jeweils mit dem Parameter $\theta = 2$ erhält man mit dem Theorem von Sklar für die verbundene Wahrscheinlichkeit $F_{(S_A, S_B)}(u_A, u_B) = \mathbb{P}(S_A \leq u_A, S_B \leq u_B)$ die folgenden Werte (vgl. (11)):

$$C_2^{Gu}(F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)) = C_2^{Gu}(0,95221; 0,88108) \\ \approx 0,873063$$

$$C_2^{Cl}(F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)) = C_2^{Cl}(0,95221; 0,88108) \\ \approx 0,847867$$

$$C_2^F(F_{S_A}(u_A), F_{S_B}(u_B)) = C_2^F(0,95221; 0,88108) \\ \approx 0,844574$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Meta-Verteilungen

Der Teil b) des Theorems von Sklar ermöglicht es eine beliebige Copula C mit beliebigen stetigen Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ durch

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n))$$

zur einer multivariaten Verteilungsfunktionen mit den Randverteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ und der durch die Copula C repräsentierten Anhängigkeitsstruktur zu kombinieren. Die so resultierenden multivariaten Verteilungen werden oft als **Meta-Verteilungen** bezeichnet.

Zum Beispiel wird eine n -dimensionale Verteilung mit Gauß-Copula und beliebigen stetigen Randverteilungsfunktionen als **Meta-Gauß-Verteilung** bezeichnet. Dem **Kreditrisiko-Modell von Li** (vgl. Abschnitt 9.7) liegt z.B. eine Meta-Gauß-Verteilung mit Exponentialverteilungen als Randverteilungen zugrunde.

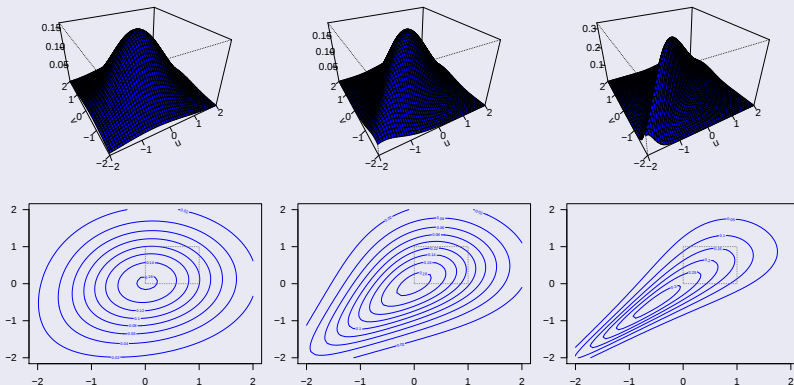
Analog spricht man bei einer multivariaten Verteilung mit t -Copula und beliebigen Randverteilungen von **Meta- t -Verteilung** und im Falle einer Clayton-Copula mit beliebigen Randverteilungen von **Meta-Clayton-Verteilung** (vgl. folgendes Beispiel).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Beispiel (Bivariate Meta-Verteilungen)

Die Abbildung zeigt drei bivariate Meta-Clayton-Verteilungen mit dem Parameter $\theta = 0,2; 1$ bzw. 3 sowie Standardnormalverteilungen als Randverteilungen.

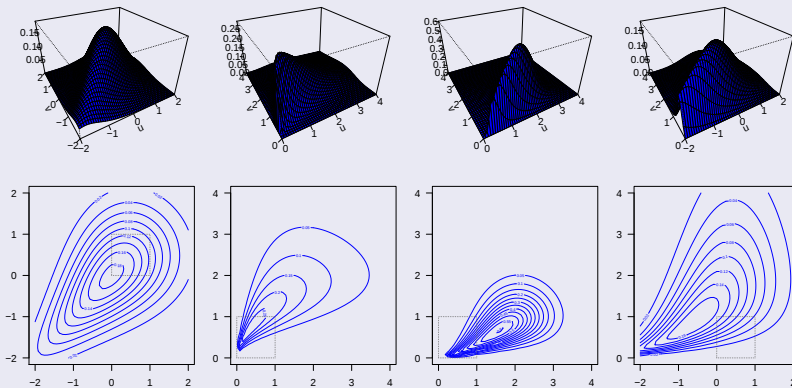


9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Beispiel (Fortsetzung)

Die Abbildung zeigt vier bivariate Meta-Clayton-Verteilungen mit dem Parameter $\theta = 1$, aber unterschiedlichen Randverteilungen. Genauer gilt: 1) $N(0, 1)$ - $N(0, 1)$, 2) $\Gamma(2, 1)$ - $\Gamma(4, 2)$, 3) Weibull(3, 2)-Weibull(2, 1) und 4) $N(0, 1)$ - $\Gamma(2, 1)$.

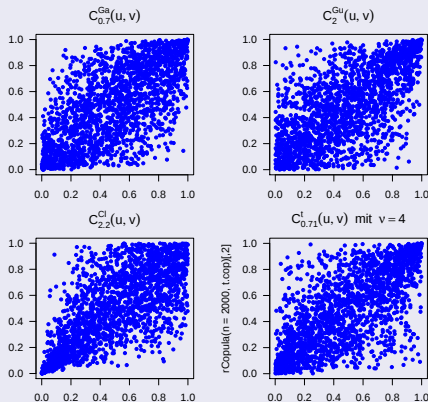


9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Beispiel (Tailabhängigkeiten)

Die untenstehende Abbildung zeigt jeweils $n = 2000$ Zufallszahlen der bivariaten Copulas $C_{0,7}^{Ga}(u, v)$, $C_2^{Gu}(u, v)$, $C_{2,2}^{Cl}(u, v)$ und $C_{4;0,71}^t(u, v)$.

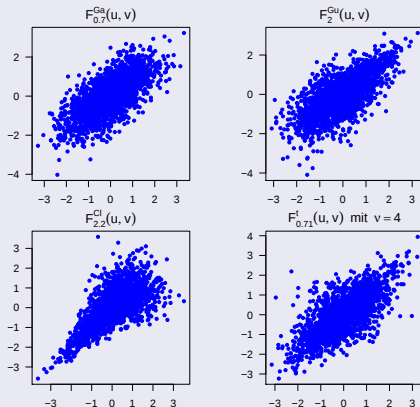


9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Beispiel (Fortsetzung)

Die untenstehende Abbildung zeigt jeweils $n = 2000$ Zufallszahlen der bivariaten Meta-Verteilungen mit den Copulas $C_{0,7}^{Ga}(u, v)$, $C_2^{Gu}(u, v)$, $C_{2,2}^{Cl}(u, v)$ bzw. $C_{4;0,71}^t(u, v)$ und Standardnormalverteilungen als Randverteilungen. Die Parameter der Copulas sind so gewählt, dass alle vier Meta-Verteilungen (ungefähr) den linearen Korrelationskoeffizienten 0,7 besitzen.



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.8 Explizite Copulas

Beispiel (Fortsetzung)

Es ist zu erkennen, dass $F_2^{Gu}(u, v)$ (bzw. $C_2^{Gu}(u, v)$) im Vergleich zu $F_{0,7}^{Ga}(u, v)$ (bzw. $C_{0,7}^{Ga}(u, v)$) eine ausgeprägte obere Tailabhängigkeit aufweist (für eine formale Definition von Tailabhängigkeit siehe Abschnitt 9.11). D.h. wenn X_1 einen extrem großen Wert annimmt, tendiert auch X_2 dazu, einen extrem großen Wert anzunehmen (und umgekehrt).

Bei $F_{2,2}^{Cl}(u, v)$ (bzw. $C_{2,2}^{Cl}(u, v)$) ist dagegen eine ausgeprägte untere Tailabhängigkeit zu beobachten, während bei $F_{4,0,71}^t(u, v)$ (bzw. $C_{4,0,71}^t(u, v)$) eine gleich stark ausgeprägte untere und obere Tailabhängigkeit zu beobachten ist.

Beachte: Die Tailabhängigkeit ist alleine durch die jeweilige Copula begründet und somit unabhängig von den verwendeten Randverteilungen.

Abschnitt 9.9

Perfekte Abhängigkeit

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.9 Perfekte Abhängigkeit

In Abschnitt 9.2 wurde gezeigt, dass zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y mit endlicher Varianz genau dann eine **perfekt lineare Abhängigkeit** besteht, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $\mathbb{P}(X = aY + b) = 1$, wenn

$$\rho(X, Y) = 1 \quad \text{oder} \quad \rho(X, Y) = -1$$

gilt.

Eine Verallgemeinerung des Konzepts der perfekt positiven linearen Abhängigkeit ist das Konzept der **perfekt positiven Abhängigkeit (Komonotonie)**:

Definition (Komonotonie)

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ heißen komonoton oder auch perfekt positiv abhängig, wenn es eine Zufallsvariable Z und monoton wachsende Funktionen $T_1, \dots, T_n$ gibt, so dass gilt:

$$(X_1, \dots, X_n)^T \stackrel{(d)}{=} (T_1(Z), \dots, T_n(Z)) \quad (22)$$

Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ sind folglich komonoton, falls sie monoton wachsende Funktionen einer einzigen gemeinsamen Zufallsvariablen Z sind.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.9 Perfekte Abhängigkeit

Zwei perfekt positiv linear abhängige Zufallsvariablen sind damit offensichtlich auch komonoton. Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch i.A. nicht.

Zwischen Komonotonie und **Komonotonie-Copula** besteht die folgende Beziehung:

Satz (Zusammenhang Komonotonie und Komonotonie-Copula)

Für Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit stetigen Verteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ sind komonoton.
- b) Die Komonotonie-Copula $M(u_1, \dots, u_n) = \min \{u_1, \dots, u_n\}$ ist die Copula des Zufallsvektors $(X_1, \dots, X_n)^T$.
- c) Für alle Paare $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ gibt es eine monoton wachsende Funktion T_{ij} mit $X_j = T_{ij}(X_i)$ $\mathbb{P}$ -f.s.

Beweis: Siehe z.B. MCNEIL ET AL. (2005), Seiten 199f. ■

Eine wichtige Eigenschaft komonotoner Zufallsvariablen für das Quantitative Risikomanagement ist die **Additivität des Value-at-Risk** und **Expected-Shortfalls**:

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.9 Perfekte Abhängigkeit

Satz (Additivität des VaR und ES bei komonotonen Zufallsvariablen)

Es sei $q \in (0, 1)$ und die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien komonoton mit stetigen und streng monoton wachsenden Verteilungsfunktionen $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$. Dann gilt

$$\text{VaR}_q(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{VaR}_q(X_i) \quad \text{und} \quad \text{ES}_q(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{ES}_q(X_i).$$

Beweis: Siehe z.B. MCNEIL ET AL. (2005), Seiten 250. ■

Eine Verallgemeinerung des Konzepts der perfekt negativen linearen Abhängigkeit ist das Konzept der **perfekt negativen Abhängigkeit (Kontramonotonie)**. Im Gegensatz zur Komonotonie ist es jedoch nur für den bivariaten Fall $n = 2$ definiert:

Definition (Kontramonotonie)

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 heißen kontramonoton oder auch perfekt negativ abhängig, wenn es eine Zufallsvariable Z und eine monoton fallende Funktion T_1 und eine monoton wachsende Funktion T_2 (oder umgekehrt) gibt, so dass gilt:

$$(X_1, X_2)^T \stackrel{(d)}{=} (T_1(Z), T_2(Z))^T \quad (23)$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.9 Perfekte Abhängigkeit

Zwei perfekt negativ linear abhängige Zufallsvariablen sind offensichtlich auch kontramonoton. Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch i.A. nicht

Zwischen Kontramonotonie und **Kontramonotonie-Copula** besteht der folgende Zusammenhang:

Satz (Zusammenhang Kontramonotonie und Kontramonotonie-Copula)

Für zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit stetigen Verteilungsfunktionen F_{X_1} und F_{X_2} sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind kontramonoton.
- b) Die Kontramonotonie-Copula $W(u_1, u_2) = \max \{u_1 + u_2 - 1, 0\}$ ist die Copula des Zufallsvektors $(X_1, X_2)^T$.
- c) Es gibt eine monoton fallende Funktion T mit $X_2 = T(X_1)$ $\mathbb{P}$ -f.s.

Beweis: Siehe z.B. EMBRECHTS ET AL. (2002). ■

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.9 Perfekte Abhängigkeit

Beispiel (Komonotonie- und Kontramonotonie)

Es sei X_1 eine positive Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion sowie

$$X_2 := X_1^{-1} \quad \text{und} \quad X_3 := \exp(-X_1).$$

D.h. die Zufallsvariablen X_1 und X_2 sowie X_1 und X_3 sind jeweils kontramonoton, während X_2 und X_3 komonoton sind. Die Copula des Zufallsvektors $(X_1, X_2, X_3)^T$ ist daher die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $(U, 1 - U, 1 - U)^T$ mit $U \sim U(0, 1)$. Nach einer kurzen Rechnung erhält man, dass diese Verteilungsfunktion durch

$$C(u_1, u_2, u_3) = \max\{\min\{u_2, u_3\} + u_1 - 1, 0\}$$

gegeben ist (siehe Übungsaufgaben).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.9 Perfekte Abhängigkeit

Das folgende Resultat macht eine Aussage darüber, welche Werte für den **linearen Korrelationskoeffizienten** ρ bei zwei Zufallsvariablen X und Y möglich sind:

Satz (Erreichbare lineare Korrelationen)

Es sei $(X, Y)^T$ ein bivariater Zufallsvektor mit nicht näher spezifizierter Verteilungsfunktion sowie den gegebenen Randverteilungsfunktionen F_{X_1} und F_{X_2} mit $0 < \text{Var}(X_1), \text{Var}(X_2) < \infty$. Dann gilt:

- a) Die erreichbaren linearen Korrelationen $\rho(X, Y)$ bilden ein abgeschlossenes Intervall $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ mit $\rho_{\min} < 0 < \rho_{\max}$.
- b) $\rho(X, Y) = \rho_{\min} \iff X$ und Y sind kontramonoton
- c) $\rho(X, Y) = \rho_{\max} \iff X$ und Y sind komonoton
- d) $\rho_{\min} = -1 \iff Y \stackrel{(d)}{=} aX + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0$
- e) $\rho_{\max} = 1 \iff Y \stackrel{(d)}{=} aX + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$

Beweis: Siehe z.B. MCNEIL ET AL. (2005), Seiten 204–205. ■

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.9 Perfekte Abhängigkeit

Beachte: $\text{VaR}_q(X_1 + X_2)$ ist nicht notwendigerweise dann maximal, wenn X_1 und X_2 **perfekt positiv abhängig (komonoton)** sind. Denn der Value-at-Risk ist i.A. **nicht subadditiv**. Es kann daher für zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 sowie $q \in (0, 1)$ auch

$$\text{Var}_q(X_1 + X_2) > \text{Var}_q(X_1) + \text{Var}_q(X_2) \quad (24)$$

gelten (vgl. Abschnitt 2.4). Gemäß des ersten Satzes in diesem Abschnitt stimmt jedoch die rechte Seite von (24) mit $\text{Var}_q(X_1 + X_2)$ überein, falls X_1 und X_2 komonoton sind. Gemäß des letzten Satzes ist dies aber genau dann der Fall, wenn die Korrelation zwischen X_1 und X_2 maximal ist. Folglich muss (24) mit einem Fall korrespondieren, in dem X_1 und X_2 eine kleinere Korrelation aufweisen.

Bemerkungen:

- Besitzt jedoch $(X_1, X_2)^T$ eine **elliptische Verteilung**, ist der Value-at-Risk **subadditiv** (vgl. Abschnitt 2.4) und $\text{VaR}_q(X_1 + X_2)$ ist dann für perfekt positiv abhängige (komonotone) Zufallsvariablen X_1 und X_2 maximal.
- Der Expected-Shortfall ist stets **subadditiv** (vgl. Abschnitt 2.5). Folglich ist $\text{ES}_q(X_1 + X_2)$ immer genau dann maximal, falls X_1 und X_2 perfekt positiv abhängig (komonoton) sind.

Abschnitt 9.10

Rangkorrelationen

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Der Wert des linearen Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$ zweier Zufallsvariablen X und Y hängt nicht nur von der Copula C des bivariaten Zufallsvektors $(X, Y)^T$ ab, sondern auch von den Randverteilungen F_X und F_Y . Dies hat zur Folge, dass der Wert von $\rho(X, Y)$ nicht nur von der Abhängigkeitsstruktur zwischen den Zufallsvariablen X und Y beeinflusst wird, sondern auch von deren Verteilungsfunktionen.

Um Abhängigkeitsmaße zu erhalten, die nur von der Copula von $(X, Y)^T$ abhängen, werden nicht die numerischen Werte von X und Y , sondern ihre Quantile betrachtet. Dies ist konsistent mit dem Copula-Ansatz, den gemäß des Satzes von Sklar gilt

$$C(u_1, u_2) = F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(u_1), F_Y^{-1}(u_2)),$$

wobei $F_X^{-1}(u_1)$ das u_1 -Quantil von X und $F_Y^{-1}(u_2)$ das u_2 -Quantil von Y ist (vgl. Abschnitt 9.4). D.h. Copulas modellieren Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen mit Hilfe ihrer Quantile.

Die Schätzung dieser Quantile erfolgt durch Rangzahlen. Zum Beispiel wird in einem Datensatz mit $n = 1000$ Beobachtungen für X , die in aufsteigender Reihenfolge angeordnet sind, das 30%-Quantil von X durch die Beobachtung mit Rang 300 geschätzt.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Solche Abhängigkeitsmaße werden deshalb als **Rangkorrelationen** bezeichnet. Sie basieren nur auf der Anordnung der Beobachtungen und nicht auf den numerischen Werten dieser Beobachtungen. Auf diese Weise wird der Einfluss der Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen eliminiert und Rangkorrelationen hängen nur von der Copula ab. Die beiden bekanntesten Vertreter der Klasse der Rangkorrelationen sind:

- a) **Spearman's ρ**
- b) **Kendall's τ**

Sie besitzen gegenüber dem linearen Korrelationskoeffizienten die beiden folgenden Vorteile:

- Sie können zur **Anpassung einer Copula** an vorhandene Daten verwendet werden (vgl. Abschnitt 9.12).
- Sie besitzen **attraktivere Eigenschaften** (vgl. die beiden folgenden Sätze).

Es wird sich zeigen, dass Spearman's ρ und Kendall's τ invariant sind bzgl. streng monoton wachsenden Transformationen. Da der lineare Korrelationskoeffizient ρ nur bzgl. positiv affin-linearen Transformationen invariant ist (vgl. Abschnitt 9.2), kann man diese beiden Rangkorrelationen als Maß für den **Grad der allgemeinen monotonen Abhängigkeit** betrachten, während der lineare Korrelationskoeffizient ρ lediglich den **Grad der monotonen linearen Abhängigkeit** misst.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Spearman's ρ

Die Rangkorrelation **Spearman's ρ** ist nach dem englischen Psychologen CHARLES E. SPEARMAN (1863–1945) benannt und ist wie folgt definiert:



Definition (Spearman's ρ)

Für zwei Zufallsvariablen X und Y mit Verteilungsfunktionen F_X bzw. F_Y ist Spearman's ρ definiert durch

$$\rho_S(X, Y) := \rho(F_X(X), F_Y(Y)). \quad (25)$$

D.h. $\rho_S(X, Y)$ ist der **lineare Korrelationskoeffizient** der transformierten Zufallsvariablen $F_X(X)$ und $F_Y(Y)$. Daraus folgt unmittelbar

$$\rho_S(X, Y) \in [-1, 1] \quad \text{und} \quad \rho_S(X, Y) = \rho_S(Y, X).$$

Für **stetige Verteilungsfunktionen** F_X und F_Y folgt mit dem Probability Integral Transformation Theorem $U_1 := F_X(X) \sim U(0, 1)$ und $U_2 := F_Y(Y) \sim U(0, 1)$ (vgl. Abschnitt 10.3) und es gilt dann:

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

$$\mathbb{E}[U_1] = \mathbb{E}[U_2] = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[U_1^2] = \mathbb{E}[U_2^2] = \frac{1}{3}$$

$$\text{Var}(U_1) = \text{Var}(U_2) = \frac{1}{12}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\rho_S(X, Y) = \rho(U_1, U_2) &= \frac{\mathbb{E}[U_1 U_2] - \mathbb{E}[U_1]\mathbb{E}[U_2]}{\sqrt{\text{Var}(U_1)\text{Var}(U_2)}} \\ &= \frac{\mathbb{E}[U_1 U_2] - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} \\ &= 12\mathbb{E}[U_1 U_2] - 3\end{aligned}\tag{26}$$

Sind X und Y **stochastisch unabhängig**, dann gilt dies auch für U_1 und U_2 und zusammen mit (26) impliziert dies

$$\rho_S(X, Y) = 12\mathbb{E}[U_1]\mathbb{E}[U_2] - 3 = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 3 = 0.$$

Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch i.A. nicht. D.h. aus $\rho_S(X, Y) = 0$ folgt i.A. nicht die stochastische Unabhängigkeit von X und Y .

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Wenn die beiden Zufallsvariablen **komonoton** oder **kontramonoton** sind, gilt $U_2 = U_1$ bzw. $U_2 = 1 - U_1$ und für Spearmans ρ folgt somit:

$$\rho_S(X, Y) = \rho(U_1, U_1) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \rho_S(X, Y) = \rho(U_1, 1 - U_1) = -1$$

D.h. Spearmans ρ liefert die Werte 1 und -1 genau dann, wenn die Zufallsvariablen X und Y komonoton bzw. kontramonoton sind.

Ist C die Copula des bivariaten Zufallsvektors $(X, Y)^T$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\rho_S(X, Y) &= 12\mathbb{E}[U_1 U_2] - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 dC(u_1, u_2) - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3\end{aligned}$$

D.h. ρ_S hängt nur von der Copula C ab. Da jedoch die Copula bzgl. streng monoton wachsenden Transformationen T_1 und T_2 von X bzw. Y invariant ist (vgl. Abschnitt 9.5), ist auch **ρ_S invariant bzgl. streng monoton wachsenden Transformationen**. D.h. es gilt

$$\rho_S(X, Y) = \rho_S(T_1(X), T_2(Y))$$

für streng monoton wachsende Transformationen T_1 und T_2 .

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Im folgenden Satz sind noch einmal die wichtigsten **Eigenschaften von ρ_S** zusammengefasst:

Satz (Eigenschaften von ρ_S)

Es sei $(X, Y)^T$ ein bivariater Zufallsvektor mit Copula C und mit stetigen Randverteilungsfunktionen. Dann gilt:

- a) X und Y stochastisch unabhängig $\implies \rho_S(X, Y) = 0$
- b) $\rho_S(X, Y) = -1 \iff X$ und Y sind kontramonoton (d.h. $Y = T(X)$ für eine monoton fallende Funktion T)
- c) $\rho_S(X, Y) = 1 \iff X$ und Y sind komonoton (d.h. $Y = T(X)$ für eine monoton wachsende Funktion T)
- d) ρ_S ist invariant bzgl. streng monoton wachsenden Transformationen und es gilt

$$\rho_S(X, Y) = 12\mathbb{E}[U_1 U_2] - 3 = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3.$$

Beweis: Siehe obige Ausführungen vor dem Satz.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Liegen für den Zufallsvektor $(X, Y)^T$ die Beobachtungen

$$\{(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n\}$$

vor, kann ρ_S leicht mit Hilfe des gewöhnlichen **empirischen linearen Korrelationskoeffizienten** (4) aus diesen Daten geschätzt werden. Hierzu sei angenommen, dass **keine Bindungen** vorliegen (d.h. $x_i \neq x_j$ und $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$).

Im Folgenden bezeichnet r_{x_i} und r_{y_i} den **Rang der Beobachtung** x_i bzw. y_i . Dabei ist $r_{x_i} = 1$, wenn x_i die kleinste und $r_{x_i} = n$, wenn x_i die größte der n Beobachtungen $x_1, \dots, x_n$ ist. Analoges gilt für die Ränge $r_{y_1}, \dots, r_{y_n}$. Ferner seien

$$\bar{r}_x := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{x_i} \quad \text{und} \quad \bar{r}_y := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{y_i}$$

die **arithmetischen Mittel** der Ränge $r_{x_1}, \dots, r_{x_n}$ bzw. $r_{y_1}, \dots, r_{y_n}$. Durch Einsetzen in (4) erhält man dann den **(empirischen) Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman**

$$r_S(X, Y) := \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{x_i} - \bar{r}_x)(r_{y_i} - \bar{r}_y)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{x_i} - \bar{r}_x)^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{y_i} - \bar{r}_y)^2}} \quad (27)$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Wegen

$$\bar{r}_x = \bar{r}_y = \frac{n+1}{2}$$

und

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{x_i} - \bar{r}_x)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{y_i} - \bar{r}_y)^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$

lässt sich (27) zu

$$r_S(X, Y) = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n \left(r_{x_i} - \frac{1}{2}(n+1) \right) \left(r_{y_i} - \frac{1}{2}(n+1) \right) \quad (28)$$

vereinfachen.

Bei **Vorhandensein von Bindungen** wird übereinstimmenden Beobachtungswerten der durchschnittliche Rang zugewiesen. Gilt z.B. $x_i = x_j = x_k$, so dass alle drei Beobachtungswerte den gleichen Rang p besitzen, dann wird ihnen der gleiche Rang

$$r_{x_i} = r_{x_j} = r_{x_k} = \frac{p + (p+1) + (p+2)}{3} = p + 1.$$

zugewiesen.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Kendalls τ

Die Rangkorrelation **Kendalls τ** ist nach dem britischen Statistiker MAURICE G. KENDALL (1907–1983) benannt und ist wie folgt definiert.



Definition (Kendalls τ)

Die bivariaten Zufallsvektoren $(X, Y)^T$ und $(X', Y')^T$ seien stochastisch unabhängig und es gelte $(X, Y)^T \stackrel{(d)}{=} (X', Y')^T$. Für die beiden Zufallsvariablen X und Y ist dann Kendalls τ definiert durch

$$\rho_{\tau}(X, Y) := \mathbb{P}((X - X')(Y - Y') > 0) - \mathbb{P}((X - X')(Y - Y') < 0). \quad (29)$$

Bei $\mathbb{P}((X - X')(Y - Y') > 0)$ handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit, dass größere (kleinere) Werte von X mit größeren (kleineren) Werten von Y einhergehen (**Wahrscheinlichkeit für Konkordanz**). Bei $\mathbb{P}((X - X')(Y - Y') < 0)$ handelt es sich dagegen um die Wahrscheinlichkeit, dass größere (kleinere) Werte von X mit kleineren (größeren) Werten von Y einhergehen (**Wahrscheinlichkeit für Diskordanz**).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Mit der **Vorzeichenfunktion (Signumfunktion)**

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ +1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

erhält man für (29) die kompaktere Schreibweise

$$\rho_{\tau}(X, Y) = \mathbb{E}[\operatorname{sgn}((X - X')(Y - Y'))]. \quad (30)$$

Offensichtlich gilt wieder

$$\rho_{\tau}(X, Y) \in [-1, 1] \quad \text{und} \quad \rho_{\tau}(X, Y) = \rho_{\tau}(Y, X).$$

Im Falle von **stetigen Randverteilungsfunktionen** F_X und F_Y gilt wieder $U_1 := F_X(X) \sim U(0, 1)$ und $U_2 := F_Y(Y) \sim U(0, 1)$. Wie man zeigen kann, besitzt Kendalls τ dann die Darstellung

$$\begin{aligned} \rho_{\tau} &= 4\mathbb{E}[C(U_1, U_2)] - 1 \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \end{aligned} \quad (31)$$

wobei C die Copula des bivariaten Zufallsvektors $(X, Y)^T$ ist (siehe z.B. EMBRECHTS ET AL. (2002)).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

D.h. ρ_τ hängt ebenfalls nur von der Copula C ab, so dass auch ρ_τ invariant ist bzgl. streng monoton wachsenden Transformationen. Es somit

$$\rho_\tau(X, Y) = \rho_\tau(T_1(X), T_2(Y))$$

für streng monoton wachsende Transformationen T_1 und T_2 .

Sind X und Y stochastisch unabhängig, dann gilt dies auch für U_1 und U_2 und die Copula C ist durch die Unabhängigkeitscopula Π gegeben (vgl. Abschnitt 9.6). Zusammen mit (31) impliziert dies

$$\begin{aligned}\rho_\tau &= 4\mathbb{E}[U_1 U_2] - 1 \\ &= 4\mathbb{E}[U_1]\mathbb{E}[U_2] - 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{2} - 1 = 0.\end{aligned}$$

Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch i.A. wieder nicht. D.h. aus $\rho_\tau(X, Y) = 0$ folgt i.A. nicht die stochastische Unabhängigkeit von X und Y .

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Wenn die beiden Zufallsvariablen **komonoton** sind, gilt $U_2 = U_1$ und

$$C(U_1, U_2) = \min \{U_1, U_1\} = U_1$$

(vgl. Abschnitt 9.6). Zusammen mit (31) folgt daraus

$$\begin{aligned}\rho_\tau &= 4\mathbb{E}[U_1] - 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1.\end{aligned}$$

Sind die Zufallsvariablen X und Y dagegen **kontramonoton**, gilt $U_2 = 1 - U_1$ und

$$C(U_1, U_2) = \max \{U_1 + (1 - U_1) - 1, 0\} = 0$$

(vgl. Abschnitt 9.6), woraus mit (31)

$$\rho_\tau = 4\mathbb{E}[0] - 1 = -1$$

folgt. D.h. auch Kendalls ρ liefert die Werte 1 und -1 genau dann, wenn die Zufallsvariablen X und Y komonoton bzw. kontramonoton sind.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Im folgenden Satz sind noch einmal die wichtigsten **Eigenschaften von ρ_τ** zusammengefasst:

Satz (Eigenschaften von ρ_τ)

Es sei $(X, Y)^T$ ein bivariater Zufallsvektor mit Copula C und stetigen Randverteilungsfunktionen.

- a) X und Y stochastisch unabhängig $\implies \rho_\tau(X, Y) = 0$
- b) $\rho_\tau(X, Y) = -1 \iff X$ und Y sind kontramontan (d.h. $Y = T(X)$ für eine monoton fallende Funktion T)
- c) $\rho_\tau(X, Y) = 1 \iff X$ und Y sind komonoton (d.h. $Y = T(X)$ für eine monoton wachsende Funktion T)
- d) ρ_τ ist invariant bzgl. streng monoton wachsenden Transformationen und es gilt

$$\rho_\tau(X, Y) = 4\mathbb{E}[C(U_1, U_2)] - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1.$$

Beweis: Siehe obige Ausführungen vor dem Satz.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Die Schreibweise (30) motiviert für ρ_τ unmittelbar den folgenden Schätzer, der als **(empirischer) Rangkorrelationskoeffizient von Kendall** bezeichnet wird:

$$r_\tau(X, Y) := \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign}((x_i - x_j)(y_i - y_j)) \quad (32)$$

Unterstellt man, dass es **keine Bindungen** gibt (d.h. $x_i \neq x_j$ und $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$), dann erhält man für (32) die **alternative Darstellung**

$$r_\tau(X, Y) = \binom{n}{2}^{-1} \left(|\{(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0\}| - |\{(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0\}| \right)$$

D.h. $r_\tau(X, Y)$ lässt sich darstellen als **Anzahl der konkordanten Paare** $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ minus der **Anzahl der diskordanten Paare** $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ geteilt durch die Gesamtzahl an verschiedenen Paaren. Wegen

$$|\{(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0\}| + |\{(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0\}| = \frac{n(n-1)}{2}$$

erhält man für (32) die Darstellung:

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

$$\begin{aligned} r_{\tau}(X, Y) &= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n(n-1)}{2} - 2 \left| \{ (x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0 \} \right| \right) \\ &= 1 - \frac{4}{n(n-1)} \left| \{ (x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0 \} \right| \end{aligned} \quad (33)$$

Im Folgenden bezeichnen r_{x_i} (bzw. r_{y_i}) wieder die Ränge der Beobachtungen x_i (bzw. y_i) mit $r_{x_i} = 1$ (bzw. $r_{y_i} = 1$) und $r_{x_i} = n$ (bzw. $r_{y_i} = n$), wenn x_i (bzw. y_i) die Kleinste bzw. wenn x_i (bzw. y_i) die Größte der n Beobachtungen $x_1, \dots, x_n$ (bzw. $y_1, \dots, y_n$) ist.

Werden die Beobachtungen (x_i, y_i) nun **anhand der x_i -Werte aufsteigend angeordnet** und ist

$q_i :=$ die Anzahl der Ränge r_{y_j} , die kleiner als r_{y_i} sind, aber in der
mittels der x_i -Werte gebildeten Reihenfolge nach r_{y_i} kommen,

dann ist durch $\sum_{i=1}^n q_i$ die **Anzahl der diskordanten Paare** gegeben und für (33) erhält man die Darstellung:

$$r_{\tau}(X, Y) = 1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n q_i \quad (34)$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Beispiel ((Tagesrenditen der BMW- und Siemens-Aktie (6))

Für die Tagesrenditen der BMW- und der Siemens-Aktie im Zeitraum vom 2.1.1973 bis zum 23.7.1996 erhält man für den empirischen linearen Korrelationskoeffizienten den Wert

$$r(X, Y) = 0,637392$$

(vgl. Abschnitt 6.2). Für den Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman und den Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall erhält man mit (28) bzw. (34) die Werte

$$r_S(X, Y) = 0,624059 \quad \text{und} \quad r_\tau(X, Y) = 0,457367.$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Beispiel (Rangkorrelationskoeffizient von Spearman und von Kendall)

Die folgende Tabelle enthält in der zweiten und dritten Spalte die $n = 20$ Beobachtungen eines bivariaten Zufallsvektors $(X, Y)^T$. In den Spalten vier und fünf sind die Ränge der x_i - bzw. y_i -Werte zu finden.

i	x_i	y_i	r_{x_i}	r_{y_i}
1	21,60	44,20	9	10
2	22,20	44,30	3	9
3	21,80	45,10	6	6
4	21,70	55,80	8	1
5	22,10	45,20	4	5
6	21,75	43,70	7	13
7	21,50	44,90	10	7
8	21,90	45,50	5	4
9	22,70	45,70	2	2
10	37,90	45,60	1	3
11	21,15	43,20	11	14
12	20,50	44,50	12	8
13	20,30	44,10	13	11
14	19,80	43,80	16	12
15	19,10	42,90	17	16
16	18,40	43,10	18	15
17	13,50	42,30	19	17
18	12,10	39,70	20	18
19	20,20	37,60	14	20
20	20,00	39,00	15	19

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Beispiel (Fortsetzung)

Mit den Rängen r_{x_i} und r_{y_i} sowie

$$\frac{1}{2}(n+1) = 10,5.$$

erhält man für den (empirischen) Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman den Wert

$$\begin{aligned} r_S(X, Y) &= \frac{12}{20(20^2 - 1)} \sum_{i=1}^{20} (r_{x_i} - 10,5)(r_{y_i} - 10,5) \\ &= \frac{1}{665} (-1,5 \cdot (-0,5) + (-7,5) \cdot (-1,5) + \dots + 4,5 \cdot 8,5) \\ &\approx 0,81. \end{aligned}$$

In der folgenden Tabelle sind die $n = 20$ Beobachtungen (x_i, y_i) anhand der x_i -Werte aufsteigend angeordnet, wobei in der letzten Spalte die q_i -Werte angegeben sind:

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Beispiel (Fortsetzung)

i	x_i	y_i	r_{x_i}	r_{y_i}	q_i
1	12,10	39,70	1	3	2
2	13,50	42,30	2	4	2
3	18,40	43,10	3	6	3
4	19,10	42,90	4	5	2
5	19,80	43,80	5	9	4
6	20,00	39,00	6	2	1
7	20,20	37,60	7	1	0
8	20,30	44,10	8	10	2
9	20,50	44,50	9	13	4
10	21,15	43,20	10	7	0
11	21,50	44,90	11	14	3
12	21,60	44,20	12	11	1
13	21,70	55,80	13	20	7
14	21,75	43,70	14	8	0
15	21,80	45,10	15	15	1
16	21,90	45,50	16	17	2
17	22,10	45,20	17	16	1
18	22,20	44,30	18	12	0
19	22,70	45,70	19	19	1
20	37,90	45,60	20	18	0

Zum Beispiel gilt $q_1 = 2$, da die beiden kleineren Ränge 1 und 2 in der Reihenfolge nach $r_{y_i} = 3$ Weiter gilt $q_2 = 3$, da $r_{y_i} = 5$ ist und von den vier kleineren Rängen 1, 2, 3 und 4 nur die drei Ränge 3, 2 und 4 in der Reihenfolge nach $r_{y_i} = 5$ kommen usw.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.10 Rangkorrelationen

Beispiel (Fortsetzung)

Damit erhält man für den (empirischen) Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall den Wert

$$r_{\tau}(X, Y) = 1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n q_i = 1 - \frac{4}{20(20-1)} \cdot 36 \approx 0,62.$$

Der empirische lineare Korrelationskoeffizient beträgt nur $r(X, Y) \approx 0,33$. D.h. die (empirischen) Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman und Kendall weisen in diesem Beispiel auf eine viel stärkere positive Abhängigkeit hin als der empirische lineare Korrelationskoeffizient.

Abschnitt 9.11

Tailabhängigkeiten

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Für das quantitative Risikomanagement sind **Wahrscheinlichkeiten für das gemeinsame Auftreten extremer Ausprägungen bei mehreren verschiedenen Risiken** von besonders großer Bedeutung.

Zum Beispiel herrscht auf Finanz- und Versicherungsmärkten die Auffassung, dass die Abhängigkeiten zwischen Risiken unter extrem ungünstigen Marktbedingungen viel größer sind als unter „normalen Bedingungen“. Dies ist oft selbst bei Risiken zu beobachten, die sonst unter „normalen Bedingungen“ nur geringe Abhängigkeiten aufweisen.

„Everything seems to go wrong at once.“

Im Risikomanagement ist man daher stark daran interessiert, das gemeinsame Auftreten vom extremen Ausprägungen bei mehreren verschiedenen Risiken zu modellieren und zu quantifizieren. Hierzu wurde das Konzept **Tailabhängigkeit** entwickelt, mit dem die Stärke der Abhängigkeit zweier Risiken X und Y speziell in den Tails der bivariaten Verteilungsfunktion von $(X, Y)^T$ gemessen werden kann. Im Folgenden werden mit den **unteren** und **oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten** die wichtigsten Vertreter dieser Klasse von Abhängigkeitsmaßen vorgestellt. Wie sich zeigen wird, hängen sie wie die Rangkorrelationen von Spearman und Kendall (siehe Abschnitt 9.10) nur von der Copula C des Zufallsvektors $(X, Y)^T$ ab. D.h. sie sind von den Randverteilungsfunktionen F_X und F_Y unabhängig.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Beim unteren und oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten werden sog. **Tailwahrscheinlichkeiten** der Form

$$\mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(q) \mid X > F_X^{-1}(q)) \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(q) \mid X \leq F_X^{-1}(q)) \quad (35)$$

betrachtet. Diese Tailwahrscheinlichkeiten geben die Wahrscheinlichkeit an, dass Y einen Wert annimmt, der größer ist als sein **q -Quantil**, gegeben, dass auch X sein q -Quantil übertrifft bzw. die Wahrscheinlichkeit, dass Y einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich seinem q -Quantil ist, gegeben, dass auch X sein q -Quantil nicht übertrifft.

Im Falle der drei **fundamentalen Abhängigkeitsstrukturen** lassen sich diese Tailwahrscheinlichkeiten sofort angeben:

Stochastische Unabhängigkeit von X und Y

Die beiden Ereignisse $\{Y > F_Y^{-1}(q)\}$ und $\{X > F_X^{-1}(q)\}$ bzw. $\{Y \leq F_Y^{-1}(q)\}$ und $\{X \leq F_X^{-1}(q)\}$ sind **stochastisch unabhängig**, Es gilt daher:

$$\mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(q) \mid X > F_X^{-1}(q)) = \mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(q)) = 1 - q$$

$$\mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(q) \mid X \leq F_X^{-1}(q)) = \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(q)) = q$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Perfekte positive Abhängigkeit (Komonotonie) von X und Y

Die Zufallsvariablen X und Y nehmen **große (kleine) Werte immer gemeinsam** an. Insbesondere übertrifft X sein q -Quantil genau dann, wenn dies auch für Y der Fall ist (vgl. Abschnitt 9.6). Es gilt daher:

$$\mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(q) \mid X > F_X^{-1}(q)) = 1$$

$$\mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(q) \mid X \leq F_X^{-1}(q)) = 1$$

Perfekte negative Abhängigkeit (Kontramonotonie) von X und Y

Die Zufallsvariablen X und Y nehmen **große (kleine) Werte niemals gemeinsam** an. Insbesondere übertrifft X sein q -Quantil genau dann, wenn dies auch für Y nicht der Fall ist (vgl. Abschnitt 9.6). Es gilt daher:

$$\mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(q) \mid X > F_X^{-1}(q)) = 0$$

$$\mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(q) \mid X \leq F_X^{-1}(q)) = 0$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Was gilt jedoch bei Vorhandensein von **anderen Abhängigkeitsstrukturen** zwischen X und Y ? Wenn die Abhängigkeiten zwischen X und Y z.B. durch eine Gauß-, t oder Gumbel-Copula repräsentiert wird? Im Risikomanagement ist man vor allem an den Tailwahrscheinlichkeiten (35) für die **Extremfälle** $q \uparrow 1$ bzw. $q \downarrow 0$ interessiert. Diese Vorüberlegungen motivieren die folgende Definition für den **unteren und oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten**:

Definition (Unterer und oberer Tailabhängigkeitskoeffizient)

Es seien F_X und F_Y die Randverteilungsfunktionen des bivariaten Zufallsvektors $(X, Y)^T$. Dann ist der obere und untere Tailabhängigkeitskoeffizient von X und Y definiert durch

$$\lambda_u(X, Y) := \lim_{q \uparrow 1} \mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(q) \mid X > F_X^{-1}(q)) \quad (36)$$

bzw.

$$\lambda_l(X, Y) := \lim_{q \downarrow 0} \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(q) \mid X \leq F_X^{-1}(q)), \quad (37)$$

vorausgesetzt die beiden Grenzwerte existieren.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Der **obere Tailabhängigkeitskoeffizient** von X und Y ist somit der Grenzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass Y für $q \uparrow 1$ sein q -Quantil übertrifft, bedingt gegeben, dass dies auch für X gilt.

Ist C die Copula des bivariaten Zufallsvektors $(X, Y)^T$ mit den stetigen Randverteilungsfunktionen F_X und F_Y , dann erhält man mit dem Satz von Sklar:

$$\begin{aligned}\lambda_u(X, Y) &= \lim_{q \uparrow 1} \mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(q) \mid X > F_X^{-1}(q)) \\&= \lim_{q \uparrow 1} \frac{\mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(q), X > F_X^{-1}(q))}{\mathbb{P}(X > F_X^{-1}(q))} \\&= \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(q)) - \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(q)) + \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(q), Y \leq F_Y^{-1}(q))}{1 - q} \\&= \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - q - q + F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(q), F_Y^{-1}(q))}{1 - q} \\&= \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - 2q + C(q, q)}{1 - q}\end{aligned}\tag{38}$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Der **untere Tailabhängigkeitskoeffizient** von X und Y ist der Grenzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass Y für $q \downarrow 0$ sein q -Quantil nicht übertrifft, bedingt gegeben, dass dies auch für X gilt.

Weitgehend analog zu $\lambda_u(X, Y)$ erhält man für den unteren Tailabhängigkeitskoeffizienten:

$$\begin{aligned}\lambda_l(X, Y) &= \lim_{q \downarrow 0} \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(q) \mid X \leq F_X^{-1}(q)) \\ &= \lim_{q \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(q), X \leq F_X^{-1}(q))}{\mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(q))} \\ &= \lim_{q \downarrow 0} \frac{F_{(X,Y)}(F_X^{-1}(q), F_Y^{-1}(q))}{q} \\ &= \lim_{q \downarrow 0} \frac{C(q, q)}{q}\end{aligned}\tag{39}$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Bemerkungen:

- In den Definitionen (36) und (37) können die Rollen von X und Y offensichtlich vertauscht werden
- Im Falle von $\lambda_u(X, Y) = 0$ oder $\lambda_l(X, Y) = 0$ sagt man, dass X und Y im oberen bzw. unteren Tail **asymptotisch unabhängig** sind. Gilt dagegen $\lambda_u(X, Y) \in (0, 1]$ oder $\lambda_l(X, Y) \in (0, 1]$ spricht man davon, dass X und Y eine obere bzw. untere **Tailabhängigkeit** aufweisen.
- Stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X und Y sind immer auch asymptotisch unabhängig. Es ist aber durchaus möglich, dass stochastisch abhängige Zufallsvariablen X und Y asymptotisch unabhängig sind (siehe folgendes Beispiel). Dies gilt z.B. für zwei stochastisch abhängige Zufallsvariablen, deren Abhängigkeitsstruktur durch eine Gauß-Copula repräsentiert wird (siehe untenstehende Tabelle).
- Wenn die Copula des Zufallsvektors von $(X, Y)^T$ eine **einfache geschlossene Form** besitzt, wie es z.B. bei der Gumbel-, Clayton-Copula und Frank-Copula der Fall ist (vgl. Abschnitt 9.8), ist die Berechnung von $\lambda_u(X, Y)$ und $\lambda_l(X, Y)$ i.d.R. einfach. Ist dies nicht der Fall, wie es z.B. bei der Gauß- und t -Copula der Fall ist (vgl. Abschnitt 9.7), ist die Berechnung häufig aufwendiger.
- Zur Quantifizierung von Tailabhängigkeiten existieren noch eine Reihe anderer Abhängigkeitsmaße.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Im folgenden Beispiel werden für bivariate Zufallsvektoren $(X, Y)^T$ mit stetigen Randverteilungsfunktionen und einer Copula C aus den Abschnitten 9.6 und 9.7 der untere und obere Tailabhängigkeitskoeffizient berechnet:

Beispiel (Untere und obere Tailabhängigkeitskoeffizienten)

a) Unabhängigkeits-Copula (vgl. Abschnitt 9.6): Mit (38) und (39) erhält man:

$$\lambda_l(X, Y) = \lim_{q \downarrow 0} \frac{\Pi(q, q)}{q} = \lim_{q \downarrow 0} \frac{q^2}{q} = 0$$

$$\lambda_u(X, Y) = \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - 2q + \Pi(q, q)}{1 - q} = \lim_{q \uparrow 1} \frac{(1 - q)^2}{1 - q} = 0$$

Wie zu erwarten erzeugt $\Pi(u_1, u_2)$ auch Unabhängigkeit in den Tails.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Beispiel (Fortsetzung)

b) Komonotonie-Copula (vgl. Abschnitt 9.6): Mit (38) und (39) folgt:

$$\lambda_l(X, Y) = \lim_{q \downarrow 0} \frac{M(q, q)}{q} = \lim_{q \downarrow 0} \frac{q}{q} = 1$$

$$\lambda_u(X, Y) = \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - 2q + M(q, q)}{1 - q} = \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - q}{1 - q} = 1$$

Wie zu erwarten erzeugt $M(u_1, u_2)$ auch perfekte Abhängigkeit in den Tails.

c) Kontramonotonie-Copula (vgl. Abschnitt 9.6): Mit (38) und (39) folgt:

$$\lambda_l(X, Y) = \lim_{q \downarrow 0} \frac{W(q, q)}{q} = \lim_{q \downarrow 0} \frac{\max\{2q - 1, 0\}}{q} = 0$$

$$\lambda_u(X, Y) = \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - 2q + W(q, q)}{1 - q} = \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - 2q + \max\{2q - 1, 0\}}{1 - q} = 0$$

Die Copula $W(u_1, u_2)$ erzeugt somit Unabhängigkeit in den Tails.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Beispiel (Fortsetzung)

d) Gumbel-Copula (vgl. Abschnitt 9.8): Für $\theta \in [1, \infty)$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dq} C_{\theta}^{Gu}(q, q) &= \frac{d}{dq} \exp\left(-\left(2(-\ln(q))^{\theta}\right)^{1/\theta}\right) \\ &= \frac{d}{dq} \exp\left(2^{1/\theta} \ln(q)\right) \\ &= \frac{d}{dq} q^{2^{1/\theta}} = 2^{1/\theta} q^{2^{1/\theta}-1}\end{aligned}$$

Zusammen mit (39) und der Regel von L'Hôpital folgt daraus:

$$\begin{aligned}\lambda_l(X, Y) &= \lim_{q \downarrow 0} \frac{C_{\theta}^{Gu}(q, q)}{q} = \lim_{q \downarrow 0} \frac{\frac{d}{dq} C_{\theta}^{Gu}(q, q)}{1} \\ &= \lim_{q \downarrow 0} 2^{1/\theta} q^{2^{1/\theta}-1} = 0\end{aligned}$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Beispiel (Fortsetzung)

Für den oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten erhält man mit (38):

$$\begin{aligned}\lambda_u(X, Y) &= \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - 2q + C_\theta^{Gu}(q, q)}{1 - q} \\ &= \lim_{q \uparrow 1} \frac{-2 + \frac{d}{dq} C_\theta^{Gu}(q, q)}{-1} \\ &= \lim_{q \uparrow 1} \frac{-2 + 2^{1/\theta} q^{2^{1/\theta} - 1}}{-1} = 2 - 2^{1/\theta}.\end{aligned}$$

D.h. bei einer Gumbel-Copula liegt im unteren Tail asymptotisch Unabhängigkeit vor und im oberen Tail ist für $\theta > 1$ eine Tailabhängigkeit gegeben, welche für $\theta \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert. Dies entspricht der Tatsache, dass die Gumbel-Copula für $\theta \rightarrow \infty$ gegen die Komonotonie-Copula konvergiert (vgl. Abschnitt 9.8).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Beispiel (Fortsetzung)

- e) Clayton-Copula (vgl. Abschnitt 9.8): Für $\theta \in (0, \infty)$ gilt:

$$\lambda_l(X, Y) = 2^{-1/\theta}$$

$$\lambda_u(X, Y) = 0$$

(siehe Übungsaufgaben). D.h. bei einer Clayton-Copula liegt im oberen Tail asymptotisch Unabhängigkeit vor und im unteren Tail ist für $\theta > 0$ eine Tailabhängigkeit gegeben, welche für $\theta \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert. Dies entspricht der Tatsache, dass die Clayton-Copula für $\theta \rightarrow \infty$ gegen die Komonotonie-Copula konvergiert (vgl. Abschnitt 9.8).

Die folgende Tabelle enthält die **Tailabhängigkeitskoeffizienten** der in den Abschnitten 9.6 bis 9.8 betrachteten Copulas:

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.11 Tailabhängigkeiten

Copula	$\lambda_l(X, Y)$	$\lambda_u(X, Y)$
$\Pi(u_1, u_2)$	0	0
$M(u_1, u_2)$	1	1
$W(u_1, u_2)$	0	0
$C_\theta^{Gu}(u_1, u_2)$	0	$2 - 2^{1/\theta}$
$C_\theta^{Cl}(u_1, u_2)$	$2^{-1/\theta}$	0
$C_\theta^F(u_1, u_2)$	0	0
$C_\rho^{Ga}(u_1, u_2)$	0	0
$C_{v,\rho}^t(u_1, u_2)$	$2t_{v+1} \left(-\sqrt{\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$	$2t_{v+1} \left(-\sqrt{\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$

Bemerkungen:

- Bei t_{v+1} handelt es sich um die **Dichte der t -Verteilung** mit $v + 1$ Freiheitsgraden.
- Für die Gauß-Copula gilt stets $\lambda_u(X, Y) = \lambda_l(X, Y) = 0$. D.h. selbst wenn zwei Zufallsvariablen X und Y durch eine Gauß-Copula mit sehr starker Korrelation gekoppelt sind, treten bei X und Y extreme Werte (asymptotisch) **unabhängig voneinander** auf. Die Gauß-Copula eignet sich somit nicht zur Modellierung von Risiken, die eine Tailabhängigkeit aufweisen.

Abschnitt 9.12

Anpassung von Copulas

,

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Bei der Anpassung einer Verteilung an einen gegebenen Datensatz verwendet man häufig **parametrische Methoden**. D.h. man betrachtet eine geeignete Verteilung mit einem oder mehreren Parametern, die dann aus den vorhandenen Daten geschätzt werden. Bei der Anpassung einer Copula geht man oft analog vor. D.h. zuerst wird anhand bestimmter Eigenschaften, wie z.B. Symmetrie oder Asymmetrie, untere und/oder obere Tailabhängigkeiten, eine geeignete **Copula** ausgewählt (z.B. Gauß-, t -, Gumbel-Hougaard-, Cook-Johnson- oder Frank-Copula). Anschließend werden die Parameter der Copula aus den vorhandenen Daten geschätzt.

In einigen Fällen werden die aus den Daten geschätzten Parameter noch weiter **kali-briert**, so dass anschließend gewünschte Eigenschaften vorliegen, die nicht bereits im Anpassungsvorgang berücksichtigt werden konnten. Man spricht dann oftmals von „guesstimate“.

Als Schätzverfahren zur Schätzung der Parameter der Copula werden im Folgenden

- a) die **Momentenmethode basierend auf Rangkorrelationen** und
- b) die **Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode)**

vorgestellt. Die folgende Darstellung der grundlegenden Ideen beschränkt sich dabei auf **bivariate Copulas**.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Momentenmethode basierend auf Rangkorrelationen

In Abschnitt 9.10 wurde gezeigt, dass die beiden **Rangkorrelationen Kendalls τ** und **Spearman's ρ** zweier Zufallsvariablen X und Y nur von der Copula C_{θ} des Zufallsvektors $(X, Y)^T$ und nicht von den Randverteilungsfunktionen F_X und F_Y der beiden Zufallsvariablen X und Y abhängen.

Dieser Sachverhalt kann zur Anpassung einer Copula C_{θ} an vorhandene Daten verwendet werden, wenn zwischen dem Copula-Parametervektor $\theta \in \mathbb{R}^k$ und den Rangkorrelationen ein (injektiver) **funktionaler Zusammenhang** der Form

$$\rho_{\tau}(X, Y) = f(\theta) \quad \text{bzw.} \quad \rho_S(X, Y) = g(\theta)$$

besteht. In einem solchen Fall erhält man durch Berechnung der empirischen Rangkorrelationskoeffizienten $r_{\tau}(X, Y)$ und $r_S(X, Y)$ und anschließender Auflösung der Gleichung

$$r_{\tau}(X, Y) = f(\hat{\theta}) \quad \text{bzw.} \quad r_S(X, Y) = g(\hat{\theta})$$

nach $\hat{\theta}$ eine Schätzung für den Copula-Parametervektor θ . Diese Methode hat den Vorteil, dass zuvor keine Schätzungen für die Randverteilungsfunktionen ermittelt werden müssen und der Inferenzprozess bzgl. der Copula C_{θ} , d.h. bzgl. der Abhängigkeitsstruktur, frei von den Randverteilungsfunktionen ist.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Zwischen den Parametern der in den Abschnitten 9.7 und 9.8 betrachteten bivariaten Copulas und den in Abschnitt 9.10 vorgestellten Rangkorrelationen $\rho_\tau(X, Y)$ und $\rho_S(X, Y)$ bestehen die folgenden **funktionalen Zusammenhänge**:

$C_\rho^{Ga}(u_1, u_2)$ $C_\rho^{Ga}(u_1, u_2)$	$\rho_\tau(X, Y) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$ $\rho_S(X, Y) = \frac{6}{\pi} \arcsin(\frac{1}{2}\rho) \approx \rho$	für $\rho \in (-1, 1)$
$C_{v,\rho}^t(u_1, u_2)$ $C_{v,\rho}^t(u_1, u_2)$	$\rho_\tau(X, Y) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$ komplizierter Ausdruck für $\rho_S(X, Y)$	für $\rho \in (-1, 1)$ und $v \in \mathbb{N}$
$C_\theta^{Gu}(u_1, u_2)$ $C_\theta^{Gu}(u_1, u_2)$	$\rho_\tau(X, Y) = 1 - \frac{1}{\theta}$ keine geschlossene Darstellung für $\rho_S(X, Y)$	für $\theta \in [1, \infty)$
$C_\theta^{Cl}(u_1, u_2)$ $C_\theta^{Cl}(u_1, u_2)$	$\rho_\tau(X, Y) = \frac{\theta}{\theta+2}$ komplizierter Ausdruck für $\rho_S(X, Y)$	für $\theta \in [-1, \infty)$
$C_\theta^F(u_1, u_2)$ $C_\theta^F(u_1, u_2)$	$\rho_\tau(X, Y) \approx \frac{32}{9\theta} \ln(\cosh(\theta/4))$ $\rho_S(X, Y) \approx \frac{3}{2}\rho_\tau(X, Y)$	für $\theta \in \mathbb{R}$

(vgl. MCNEIL ET AL. (2005), Abschnitte 5.3 und 5.4 und BECKER ET AL. (2016), Tabelle 1.1).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Damit erhält man für die Copula-Parameter ρ und θ die folgenden **Schätzer**:

$C_{\rho}^{Ga}(u_1, u_2)$	$\hat{\rho} = r_S(X, Y)$
$C_{v, \rho}^t(u_1, u_2)$	$\hat{\rho} = \sin(\frac{\pi}{2} r_{\tau}(X, Y))$
$C_{\theta}^{Gu}(u_1, u_2)$	$\hat{\theta} = \frac{1}{1 - r_{\tau}(X, Y)}$
$C_{\theta}^{Cl}(u_1, u_2)$	$\hat{\theta} = \frac{2r_{\tau}(X, Y)}{1 - r_{\tau}(X, Y)}$
$C_{\theta}^F(u_1, u_2)$	Als Lösung der Gleichung $r_{\tau}(X, Y) = \frac{32}{9\hat{\theta}} \ln(\cosh(\hat{\theta}/4))$

Eine Schätzung für den zweiten Parameter v der t -Copula kann anschließend durch Einsetzen der Schätzung $\hat{\rho}$ in die Log-Likelihoodfunktion der t -Copula und Anwendung der Maximum-Likelihood-Methode ermittelt werden (siehe hierzu auch die folgenden Ausführungen zur Maximum-Likelihood-Methode).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode)

Im Folgenden sei C_{θ} eine vom Parametervektor θ abhängige (bivariate) Copula mit der Dichte c_{θ} . Ferner seien $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ Realisierungen von stochastisch unabhängigen und identisch-verteilten bivariate Zufallsvektoren mit

$$\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n \sim C_{\theta}.$$

Den **Maximum-Likelihood-Schätzer (ML-Schätzer)** für den Parametervektor θ der Copula C_{θ} erhält man dann durch **Maximierung der Log-Likelihoodfunktion**

$$\begin{aligned} \ln(L(\theta; \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)) &:= \ln \left(\prod_{i=1}^n c_{\theta}(\mathbf{u}_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln(c_{\theta}(\mathbf{u}_i)) \end{aligned} \quad (40)$$

bzgl. dem Parametervektor θ .

In Anwendungen besteht jedoch das Problem, dass i.d.R. keine Realisierungen $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ der bivariaten Zufallsvektoren $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$ mit der Verteilungsfunktion C_{θ} vorliegen.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Stattdessen sind Realisierungen

$$\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{12})^T, \dots, \mathbf{x}_n = (x_{n1}, x_{n2})^T \quad (41)$$

von stochastisch unabhängigen und identisch-verteilten bivariaten Zufallsvektoren

$$\mathbf{X}_1 = (X_{11}, X_{12})^T, \dots, \mathbf{X}_n = (X_{n1}, X_{n2})^T \quad (42)$$

mit Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$ und Copula $C_{\boldsymbol{\theta}}$ gegeben (siehe z.B. das folgende Beispiel zu den Tagesrenditen der BMW- und Siemens-Aktie).

Es müssen daher zuerst mit Hilfe der Realisierungen (41) **Pseudo-Daten** $\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_n$ für die Copula $C_{\boldsymbol{\theta}}$ erzeugt werden, bevor anschließend ein ML-Schätzer für den Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ ermittelt werden kann.

Hierzu sei angenommen, dass die Randverteilungsfunktionen F_{X_1} und F_{X_2} von $F_{\mathbf{X}}$ stetig sind. Ferner sei

$$\tilde{\mathbf{U}}_i := (\tilde{U}_{i1}, \tilde{U}_{i2}) \quad \text{mit} \quad \tilde{U}_{i1} := F_{X_1}(X_{i1}) \quad \text{und} \quad \tilde{U}_{i2} := F_{X_2}(X_{i2})$$

für $i = 1, \dots, n$. Dann folgt:

$$\tilde{\mathbf{U}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{U}}_n \sim C_{\boldsymbol{\theta}}$$

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Denn mit dem Satz von Sklar (vgl. (12)) erhält man:

$$\begin{aligned} F_{\tilde{\mathbf{U}}_i}(\tilde{u}_{i1}, \tilde{u}_{i2}) &= \mathbb{P}(\tilde{U}_{i1} \leq \tilde{u}_{i1}, \tilde{U}_{i2} \leq \tilde{u}_{i2}) \\ &= \mathbb{P}(F_{X_1}(X_{i1}) \leq \tilde{u}_{i1}, F_{X_2}(X_{i2}) \leq \tilde{u}_{i2}) \\ &= \mathbb{P}(X_{i1} \leq F_{X_1}^{-1}(\tilde{u}_{i1}), X_{i2} \leq F_{X_2}^{-1}(\tilde{u}_{i2})) \\ &= F_{\mathbf{X}}(F_{X_1}^{-1}(\tilde{u}_{i1}), F_{X_2}^{-1}(\tilde{u}_{i2})) \\ &= C_{\boldsymbol{\theta}}(\tilde{u}_{i1}, \tilde{u}_{i2}) \end{aligned}$$

Da jedoch in den meisten Anwendungen die Randverteilungsfunktionen F_{X_1} und F_{X_2} unbekannt sind, müssen diese oft aus den vorhandenen Beobachtungen (41) geschätzt werden. Sind durch $\hat{F}_{X_1}$ und $\hat{F}_{X_2}$ solche **Schätzer** gegeben, erhält man durch

$$\hat{\mathbf{u}}_i := (\hat{u}_{i1}, \hat{u}_{i2}) \quad \text{mit} \quad \hat{u}_{i1} := \hat{F}_{X_1}(x_{i1}) \quad \text{und} \quad \hat{u}_{i2} := \hat{F}_{X_2}(x_{i2}) \quad (43)$$

für $i = 1, \dots, n$ **Pseudo-Daten**, die in (40) eingesetzt und für die ML-Schätzung des Parametervektors $\boldsymbol{\theta}$ verwendet werden können. Die Maximierung der **Pseudo-Log-Likelihoodfunktion**

$$\ln(L(\boldsymbol{\theta}; \hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_n)) = \sum_{i=1}^n \ln(c_{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathbf{u}}_i))$$

bzgl. $\boldsymbol{\theta}$ liefert dann für den Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ die Schätzung $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Zur Bestimmung der Schätzungen $\hat{F}_{X_1}$ und $\hat{F}_{X_2}$ für die Randverteilungsfunktionen F_{X_1} und F_{X_2} stehen die folgenden Möglichkeiten zur Auswahl:

- a) **Parametrische Schätzung:** Wahl geeigneter parametrischer Verteilungsfunktionen (z.B. Gamma- oder Lognormal-Verteilung) und Anpassung dieser Verteilungen an die vorhandenen Beobachtungen (41) (d.h. Schätzung der Parameter) mittels der ML-Methode. Dieses Vorgehen wird als **IFM-Methode** (inference for margins method) bezeichnet.
- b) **Nichtparametrische Schätzung:** Schätzung der Randverteilungsfunktionen F_{X_1} und F_{X_2} durch die (modifizierten) empirischen Verteilungsfunktionen

$$\hat{F}_{X_1}(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, x]}(x_{i1}) \quad \text{bzw.} \quad \hat{F}_{X_2}(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 1_{(-\infty, x]}(x_{i2}).$$

Sie unterscheidet sich von der (gewöhnlichen) empirischen Verteilungsfunktion dadurch, dass im Nenner $n+1$ statt n steht. Auf diese Weise wird sichergestellt, dass die Pseudo-Daten $\hat{\mathbf{u}}_i$ in $(0, 1)^2$ liegen, da bei vielen Copulas die Dichte c_θ auf dem Rand von $[0, 1]^2$ unendlich ist. Bei diesem Vorgehen spricht man von **CML-Methode** (canonical maximum likelihood method).

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

- c) **Semiparametrische Schätzung:** Da die (modifizierte) empirische Verteilungsfunktion in den Tails oft nur eine schlechte Anpassung liefert, ist es häufig sinnvoll in den Tails eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung anzupassen (vgl. Abschnitt 7.7) und nur den restlichen Teil der Verteilung mittels der (modifizierten) empirischen Verteilungsfunktion zu modellieren.

Bemerkungen:

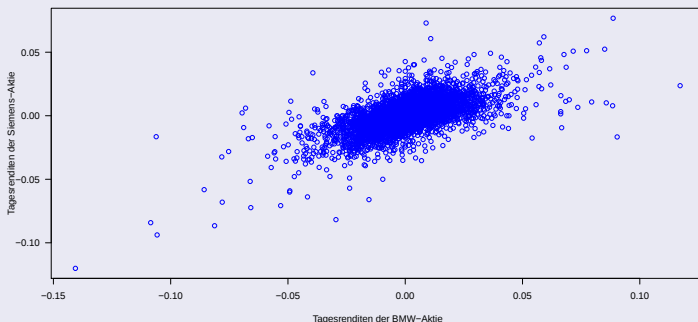
- Die ML-Methode basierend auf Pseudo-Beobachtungen hat gegenüber der Momentenmethode basierend auf Rangkorrelationen den **Nachteil**, dass Schätzungen $\hat{F}_{X_1}$ und $\hat{F}_{X_2}$ für die Randverteilungsfunktionen F_{X_1} bzw. F_{X_2} ermittelt werden müssen und der Inferenzprozess bzgl. der Copula C_θ damit von den Randverteilungsfunktionen abhängig ist. Die Qualität der Schätzung $\hat{\theta}$ für den Parametervektor θ ist daher stark von der Qualität der Schätzungen $\hat{F}_{X_1}$ und $\hat{F}_{X_2}$ abhängig.
- Es ist zu beachten, dass die Pseudo-Beobachtungen (43) selbst dann Realisierungen von stochastisch abhängigen Zufallsvektoren sind, wenn (41) Realisierungen von stochastisch unabhängigen Zufallsvektoren (42) sind, da die Schätzungen $\hat{F}_{X_1}$ und $\hat{F}_{X_2}$ von allen Realisierungen (41) abhängen.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Beispiel (Tagesrenditen der BMW- und Siemens-Aktie (7))

Aus dem Streudiagramm mit den Tagesrenditen der BMW- und der Siemens-Aktie für den Zeitraum vom 2.1.1973 bis zum 23.7.1996 ist zu erkennen, dass bei den beiden Aktien hohe bzw. niedrige Tagesrenditen tendenziell gleichzeitig auftreten. D.h. tendenziell gehen hohe (niedrige) Tagesrenditen in dem einen Unternehmen mit hohen (niedrigen) Tagesrenditen im anderen Unternehmen einher.



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Beispiel (Fortsetzung)

Im Folgenden werden eine (bivariate) Gauß-, t -, Gumbel- und Clayton-Copula an die Tagesrenditen der BMW- und Siemens-Aktie angepasst. Dazu wird die Momentenmethode basierend auf Rangkorrelationen und die ML-Methode mit (modifizierten) empirischen Verteilungsfunktionen zur Schätzung der beiden Randverteilungen (d.h. CML-Methode) verwendet. Für die Parameter der Copula erhält man dann die folgenden Schätzungen:

Copula	Momentenmethode	CML-Methode	$l(\theta; \hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_n)$
$C_\rho^{Ga}(u, v)$	$\rho = 0,624$	$\rho = 0,640$	1615,92
$C_{v,\rho}^t(u, v)$	$\rho = 0,658$	$\rho = 0,651, v = 4,634$	1772,31
$C_\theta^{Gu}(u, v)$	$\theta = 1,843$	$\theta = 1,741$	1538,40
$C_\theta^{Cl}(u, v)$	$\theta = 1,686$	$\theta = 1,202$	1452,75

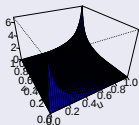
D.h. die t -Copula liefert die beste Anpassung. Dies ist keine Überraschung, da die t -Copula die einzige der vier angepassten Copulas ist, mit der sowohl die untere als auch die obere Tailabhängigkeit in den Daten im Copula-Modell erfasst wird.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

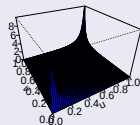
9.12 Anpassung von Copulas

Beispiel (Fortsetzung)

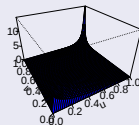
$$C_{0.64}^{Ga}(u, v)$$



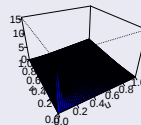
$$C_{0.651}^t(u, v) \text{ mit } v = 4.634$$



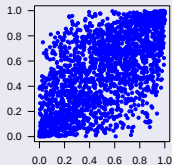
$$C_{1.741}^{Gu}(u, v)$$



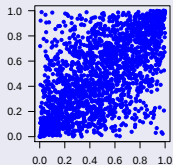
$$C_{1.202}^{Cl}(u, v)$$



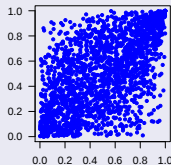
$$C_{0.64}^{Ga}(u, v)$$



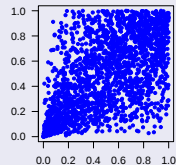
$$C_{0.651}^t(u, v) \text{ mit } v = 4.634$$



$$C_{1.741}^{Gu}(u, v)$$



$$C_{1.202}^{Cl}(u, v)$$



9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Beispiel (Fortsetzung)

Die untenstehende Tabelle gibt für die vier mittels der CML-Methode angepassten Copulas jeweils den unteren und oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten an:

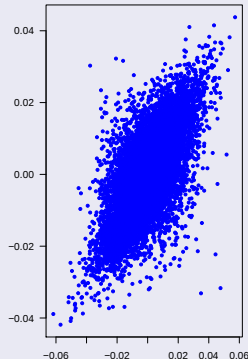
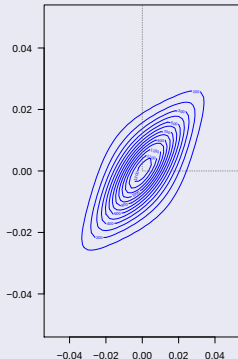
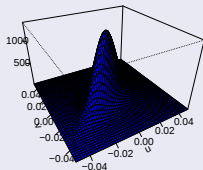
Copula	$\lambda_l(X, Y)$	$\lambda_u(X, Y)$
$C_{0,64}^{Ga}(u, v)$	0	0
$C_{4,634;0,651}^t(u, v)$	0,31959	0,31959
$C_{1,741}^{Gu}(u, v)$	0	0,51096
$C_{1,202}^{Cl}(u, v)$	0,56177	0

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.12 Anpassung von Copulas

Beispiel (Fortsetzung)

Die untenstehende Abbildung zeigt die Dichte, das Isohöhenliniendiagramm und ein Streudiagramm mit 10000 Zufallszahlen der angepassten Meta- t -Verteilung mit der t -Copula $C_{4,634;0,651}^t(u, v)$ sowie den Randverteilungen $N(0,00034072; 0,00021773)$ und $N(0,00021306; 0,00012992)$, deren Parameter mittels der Momentenmethode ermittelt wurden.



Abschnitt 9.13

Literatur

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.13 Literatur

-  BECKER, T., HERRMANN, R., SANDOR, V., SCHÄFER, D., WELLISCH, U. (2016). *Stochastische Risikomodellierung und statistische Methoden*. Springer.
-  DENUIT, M., DHAENE, J., GOOVAERTS, M., KAAS, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. Wiley.
-  EMBRECHTS, P., MCNEIL, A. J., STRAUMANN, D. (2002). *Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls*. In Risk Management: Value at Risk and Beyond (ed. M. Dempster). Cambridge University Press.
-  EMBRECHTS, P. (2006). *Discussion of „Copulas: Tales and Facts by Thomas Mikosch“*. Extremes, 9/1, p. 45–47.
-  FREES, E. W., VALDEZ, E. A. (1998). *Understanding relationships using copulas*. North American Actuarial Journal, 2/1, p. 1–25.
-  GENEST, C., RÉMILLARD, B. (2006). *Discussion of „Copulas: Tales and Facts by Thomas Mikosch“*. Extremes, 9/1, p. 27–36.
-  GENEST, C., NEŠLEHOVÁ, J. (2007). *A primer on copulas for count data*. Astin Bulletin, 37/2, p. 475–515.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.13 Literatur



JOE, H. (2014). *Dependence Modeling with Copulas*. Chapman & Hall.



KLUGMAN, S. A., PARSA, R. (1999). *Fitting bivariate loss distributions with copulas*. Insurance: Mathematics & Economics, 24/1, p. 139–148.



KRIELE, M., WOLF, J. (2012). *Wertorientiertes Risikomanagement von Versicherungsunternehmen*. Springer.



LI, DAVID X. (2000). *On Default Correlation: A copula function approach*. Journal of Fixed Income, 9/4, p. 43–54.



LINDNER, M. M. (2007). *Application of Copula-based Methods in Non-Life Insurance*. Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften.



MCNEIL, A. J., FREY, R., EMBRECHTS, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton Press.



MEINTRUP, D., SCHÄFFLER, S. (2005). *Stochastik: Theorie und Anwendungen*. Springer.



MIKOSCH, T. (2006). *Copulas: Tales and Facts*. Extremes, 9/1, p. 3–20.

9. Modellierung stochastischer Abhängigkeiten

9.13 Literatur

-  MIKOSCH, T. (2006). *Copulas: Tales and Facts – Rejoinder*. *Extremes*, 9/1, p. 55–62.
-  NELSEN, R. B. (1999). *An Introduction to Copulas*. Springer.
-  PESTMAN, W. R. (1998). *Mathematical Statistics*. de Gruyter.
-  SALOMON, F. (2009). *Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street*. *Wired Magazine*, Issue 17.03.
-  SCHWEIZER, B., WOLFF, E. F. (1981). *On nonparametric measures of dependence for random variables*. *The Annals of Statistics*, 9/4, p. 879–885.
-  SKLAR, A. (1959). *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8, p. 229–231.
-  VRIES, C. G. DE, ZHOU, C. (2006). *Discussion of „Copulas: Tales and Facts by Thomas Mikosch“*. *Extremes*, 9/1, p. 23–25.