

Quantitatives Risikomanagement 2

SS 2026

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg

Lehrstuhl für BWL, insb. Mathematik und Statistik in den Wirtschaftswissenschaften



Lösungen

Lösungen zu Kapitel 7

Aufgabe 1

- a) Für die Verteilungsfunktion des standardisierten Maximums folgt mit $F_{M_n}(x) = F_X(x)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Abschnitt 7.3) und $F_X(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$ für $X \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$ und $x > 0$ (vgl. Abschnitt 4.12):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) &= \mathbb{P}(M_n \leq b_n x + a_n) \\&= \left(\mathbb{P}(X \leq b_n x + a_n)\right)^n \\&= \left(\mathbb{P}\left(X \leq \frac{\lambda}{\alpha} n^{1/\alpha} x + \lambda n^{1/\alpha} - \lambda\right)\right)^n \\&= \left(1 - \left(\frac{\lambda + \frac{\lambda}{\alpha} n^{1/\alpha} x + \lambda n^{1/\alpha} - \lambda}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)^n \\&= \left(1 - \left(n^{1/\alpha} \left(\frac{x}{\alpha} + 1\right)\right)^{-\alpha}\right)^n \\&= \left(1 - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right)^n \longrightarrow \exp\left(-\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right) \quad \text{für } n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

D.h. die Verteilung des standardisierten Maximums konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Fréchet-Verteilung mit dem Shape-Parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$ (vgl. Abschnitt 7.4).

- b) Für die Verteilungsfunktion des standardisierten Maximums folgt mit $F_{M_n}(x) = F_X(x)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Abschnitt 7.3) und

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

für $X \sim U(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) &= \mathbb{P}(M_n \leq b_n x + a_n) \\ &= (\mathbb{P}(X \leq b_n x + a_n))^n \\ &= \left(\mathbb{P}\left(X \leq \frac{x}{n} + 1\right)\right)^n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -n \\ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{für } -n < x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Zusammen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x \right) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}.$$

D.h. die Verteilung des standardisierten Maximums konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Weibull-Verteilung mit dem Shape-Parameter $\xi = -1$ (vgl. Abschnitt 7.4).

Aufgabe 2

Der jährliche Maximalschaden M_{Jahr} ist das Maximum der zwölf monatlichen Maximalschäden M_{Monat} :

$$M_{\text{Jahr}} = \max \{M_{\text{Monat},1}, \dots, M_{\text{Monat},12}\}$$

Es gilt daher

$$F_{M_{\text{Jahr}}}(x) = F_{M_{\text{Monat}}}(x)^{12}$$

(vgl. Abschnitt 7.3). Da jedoch die Fréchet-Verteilung als verallgemeinerte Extremwertverteilung die Max-stability-Eigenschaft aufweist, besitzt auch der jährliche Maximalschaden M_{Jahr} eine Fréchet-Verteilung (vgl. Abschnitt 7.4). Mit

$$F_{M_{\text{Monat}}}(x) = \exp \left(- \left(1 + \xi_M \frac{x - \mu_M}{\sigma_M} \right)^{-1/\xi_M} \right)$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit $1 + \xi_M \frac{x - \mu_M}{\sigma_M} > 0$ (vgl. Abschnitt 7.4) erhält man für die Verteilungsfunktion von M_{Jahr} :

$$\begin{aligned} F_{M_{\text{Jahr}}}(x) &= F_{M_{\text{Monat}}}(x)^{12} = \exp \left(- \left(1 + \xi_M \frac{x - \mu_M}{\sigma_M} \right)^{-1/\xi_M} \right)^{12} \\ &= \exp \left(-12 \left(1 + \xi_M \frac{x - \mu_M}{\sigma_M} \right)^{-1/\xi_M} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp \left(- \left(12^{-\xi_M} + \xi_M \frac{x - \mu_M}{12^{\xi_M} \sigma_M} \right)^{-1/\xi_M} \right) \\
 &= \exp \left(- \left(1 + \xi_M \frac{x - \left(\mu_M - \frac{\sigma_M - 12^{\xi_M} \sigma_M}{\xi_M} \right)}{12^{\xi_M} \sigma_M} \right)^{-1/\xi_M} \right)
 \end{aligned}$$

Der jährliche Maximalschaden M_{Jahr} ist somit Fréchet-verteilt mit den Parametern

$$\xi_J = \xi_M, \quad \mu_J = \mu_M - \frac{\sigma_M - \sigma_J}{\xi_M} \quad \text{und} \quad \sigma_J = 12^{\xi_M} \sigma_M.$$

Aufgabe 3

Wegen $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(1)$ gilt

$$F_X(5) = 1 - e^{-5} = 0,993262$$

(vgl. Abschnitt 4.7). Damit erhält man für M_n mit $n = 10$ und $n = 100$ die folgenden exakten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(M_{10} \leq 5) = (F_X(5))^{10} = 0,93463$$

$$\mathbb{P}(M_{100} \leq 5) = (F_X(5))^{100} = 0,50861$$

(vgl. Abschnitt 7.3). Ferner folgt mit $a_n = \ln(n)$ und $b_n = 1$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n \leq 5) &= \mathbb{P}\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq \frac{5 - a_n}{b_n}\right) \\ &= \mathbb{P}(M_n - \ln(n) \leq 5 - \ln(n))\end{aligned}\tag{1}$$

Ferner ist aus der Vorlesung bereits bekannt, dass das standardisierte Maximum $\frac{M_n - a_n}{b_n} = M_n - \ln(n)$ für $n \rightarrow \infty$ eine Gumbel-Verteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, also $F_0(x; 0, 1) = e^{-e^{-x}}$, als Grenzverteilung besitzt (vgl. Abschnitt 7.4).

Damit erhält man für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ für (1) die Approximation

$$\mathbb{P}(M_n \leq 5) \approx e^{-e^{-(5 - \ln(n))}} = e^{-ne^{-5}}$$

und folglich für die beiden gesuchten Wahrscheinlichkeiten die folgenden Näherungswerte:

$$\mathbb{P}(M_{10} \leq 5) \approx 0,93484$$

$$\mathbb{P}(M_{100} \leq 5) \approx 0,50977$$

Aufgabe 4

Aus

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \approx F_\xi(x; \mu, \sigma)$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_n \leq x) &= \mathbb{P}\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq \frac{x - a_n}{b_n}\right) \\ &\approx F_\xi\left(\frac{x - a_n}{b_n}; \mu, \sigma\right) \\ &= \begin{cases} \exp\left(-\left[1 + \xi \frac{\frac{x - a_n}{b_n} - \mu}{\sigma}\right]_+^{-1/\xi}\right) & \text{für } \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{\frac{x - a_n}{b_n} - \mu}{\sigma}\right)\right) & \text{für } \xi = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \exp\left(-\left[1 + \xi \frac{x - (b_n\mu + a_n)}{b_n\sigma}\right]_+^{-1/\xi}\right) & \text{für } \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - (b_n\mu + a_n)}{b_n\sigma}\right)\right) & \text{für } \xi = 0 \end{cases} \\ &= F_\xi(x; \tilde{\mu}, \tilde{\sigma}) \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{\mu} = b_n\mu + a_n$ und $\tilde{\sigma} = b_n\sigma$.

Aufgabe 5

Wegen

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $X_1, \dots, X_n \sim \text{Par}(\alpha, \lambda)$ (vgl. Abschnitt 4.12) erhält man für $b_n x + a_n > 0$:

$$\begin{aligned} n(1 - F_X(b_n x + a_n)) &= n \left(\frac{\lambda}{\lambda + b_n x + a_n} \right)^\alpha \\ &= n \left(1 + \frac{a_n}{\lambda} + \frac{b_n}{\lambda} x \right)^{-\alpha} \\ &= \left(n^{-1/\alpha} + \frac{n^{-1/\alpha} a_n}{\lambda} + \frac{n^{-1/\alpha} b_n}{\lambda} x \right)^{-\alpha} \end{aligned}$$

Zusammen mit dem letzten Satz in Abschnitt 7.4 liefert dies den Ansatz

$$\alpha = \frac{1}{\xi}, \quad n^{-1/\alpha} + \frac{n^{-1/\alpha} a_n}{\lambda} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{n^{-1/\alpha} b_n}{\lambda} = \xi.$$

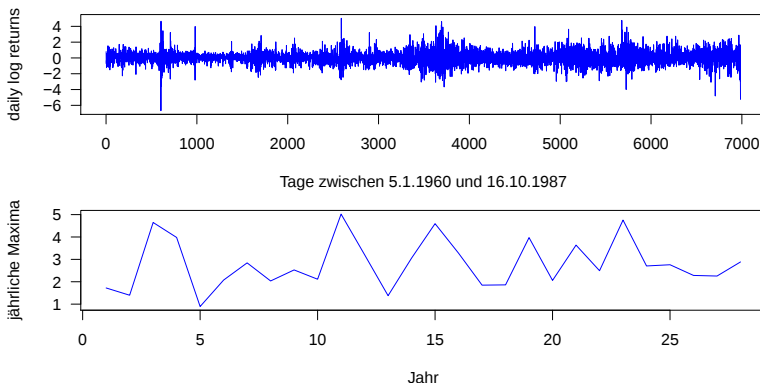
Daraus folgt durch Umformung

$$a_n = (n^{1/\alpha} - 1)\lambda \quad \text{und} \quad b_n = \frac{\lambda n^{1/\alpha}}{\alpha}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6

- a) Die folgende Abbildung zeigt die Zeitreihe mit den täglichen logarithmierten Renditen des S&P 500 Aktienindex vom 05.01.1960 bis 16.10.1987 (6985 Beobachtungen) und die zugehörigen 28 Jahresmaxima.



- b) Für die drei Parameter ξ , μ und σ resultieren die folgenden ML-Schätzungen und Standardabweichungen:

	Parameterschätzung	Standardabweichung	
ξ	-0,091	0,170	nicht signifikant
μ	2,328	0,203	signifikant
σ	0,928	0,148	signifikant

Die Parameterschätzung für ξ ist nicht signifikant von 0 verschieden. Mit $\hat{\xi} = 0$ resultiert die Gumbel-Verteilung

$$\hat{F}_0(x; 2,328, 0,928) = \exp \left(-\exp \left(-\frac{x - 2,328}{0,928} \right) \right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (vgl. Abschnitt 7.4).

- c) Mit

$$\hat{x}(p) = \hat{\mu} - \hat{\sigma} \ln[-\ln(1-p)]$$

(vgl. Abschnitt 7.5) erhält man zu den Überschreitungswahrscheinlichkeiten $p = 0,1$; 0,05 und 0,01 die folgenden Wiederkehrwerte (Return Levels)

$$\hat{x}(0,1) = 4,416, \quad \hat{x}(0,05) = 5,084 \quad \text{und} \quad \hat{x}(0,01) = 6,597.$$

R-Code:

```
1  ###
2  # Anpassung einer verallgemeinerten Extremwertverteilung mittels Block-Maxima-Methode
3  ###
4
5  # Laden des Pakets "evir"
6  library(evir)
7  data(spto87)
8
9  # Ausgabe der Zeitreihe (Beobachtungen)
10 par(mfrow=c(2,1),cex=2,mar=c(4,5,1,1))
11 plot.ts(spto87, ylab="daily log returns", xlab="Tage zwischen 5.1.1960 und 16.10.1987",
12         col=4, las=1)
13
14 # Anpassung einer verallgemeinerten EWV and die jährlichen Maxima mittels Block-Maxima-Methode
15 fit<-gev(spto87, block="year")
16 plot.ts(fit$data, ylab="jährliche Maxima", xlab="Jahr", col=4,las=1)
17
18 # Ausgabe der Parameterschätzungen, Standardabweichungen und Varianz-Kovarianz-Matrix
19 fit$par.ests
20 fit$par.ses
21 fit$varcov
22
23 # Ausgabe der Wiederkehrwert (Return Levels) zu den Übergangswahrscheinlichkeiten
24 p=0.1, 0.05, 0.01
25 p<-c(0.1,0.05,0.01)
26 x.p<-fit$par.ests[3]-fit$par.ests[2]*log(-log(1-p))
```

Aufgabe 7

7. Aufgabe

Der Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ einer verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit Shape-Parameter $\xi < 1$, Lokalisationsparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Skalierungsparameter $\sigma > 0$ ist gegeben durch

$$\text{ES}_q(X) = \frac{\text{VaR}_q(X)}{1 - \xi} + \frac{\sigma - \xi\mu}{1 - \xi}$$

(vgl. Abschnitt 7.7). Für $\xi < 1$ gilt daher:

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_q(X)}{\text{VaR}_q(X)} &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\frac{\text{VaR}_q(X)}{1 - \xi} + \frac{\sigma - \xi\mu}{1 - \xi}}{\text{VaR}_q(X)} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - \xi} + \frac{\sigma - \xi\mu}{\text{VaR}_q(X)(1 - \xi)} \right) \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{q \rightarrow \infty} \text{VaR}_q(X) = \infty$ für $0 \leq \xi < 1$ und $\lim_{q \rightarrow \infty} \text{VaR}_q(X) = \mu - \frac{\sigma}{\xi}$ für $\xi < 0$ (vgl. Abschnitt 7.7) folgt daraus weiter:

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\text{ES}_q(X)}{\text{VaR}_q(X)} &= \begin{cases} \frac{1}{1 - \xi} & \text{für } 0 \leq \xi < 1 \\ \frac{1}{1 - \xi} + \frac{\sigma - \xi\mu}{\left(\mu - \frac{\sigma}{\xi}\right)(1 - \xi)} & \text{für } \xi < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1 - \xi} & \text{für } 0 \leq \xi < 1 \\ 1 & \text{für } \xi < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Interpretation: Für $\xi \leq 0$ (d.h. Light-Tail-Verteilung) unterscheiden sich der Value-at-Risk und der Expected Shortfall mit zunehmendem Sicherheitsniveau q immer weniger. Dagegen ist für $0 < \xi < 1$ (d.h. Heavy-Tail-Verteilung) der Unterschied zwischen Value-at-Risk und Expected Shortfall umso größer, je näher ξ bei 1 liegt. Dies verdeutlicht das mit Heavy-Tail-Verteilungen verbundene Gefahrenpotential und dass der Value-at-Risk in Verbindung mit Heavy-Tail-Verteilung nicht das geeignete Risikomaß darstellt.

Aufgabe 8

Mit der Dichte der verallgemeinerten Pareto-Verteilung für $\xi \neq 0$ (vgl. Abschnitt 7.7) erhält man mittels partieller Integration für $\xi > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mu}^{\infty} x \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi - 1} dx \\ &= -x \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi} \Big|_{\mu}^{\infty} + \int_{\mu}^{\infty} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi} dx \\ &= 0 + \mu + \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{\xi - 1}{\xi}} \frac{\sigma}{\xi - 1} \Big|_{\mu}^{\infty}\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nur bestimmt, falls zusätzlich $\xi < 1$ gilt. In diesem Fall folgt weiter

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mu + \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\frac{\xi - 1}{\xi}} \frac{\sigma}{\xi - 1} \Big|_{\mu}^{\infty} \\ &= \mu + 0 - \frac{\sigma}{\xi - 1} \\ &= \mu + \frac{\sigma}{1 - \xi}.\end{aligned}$$

Völlig analog erhält man für $\xi < 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mu}^{\mu - \frac{\sigma}{\xi}} x \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi - 1} dx \\ &\quad \vdots \\ &= \mu + \frac{\sigma}{1 - \xi}.\end{aligned}$$

Mit der Dichte der verallgemeinerten Pareto-Verteilung für $\xi = 0$ (vgl. Abschnitt 7.7) erhält man mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mu}^{\infty} x \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right) dx \\ &= -x \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \Big|_{\mu}^{\infty} + \int_{\mu}^{\infty} \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right) dx \\ &= 0 + \mu - \sigma \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \Big|_{\mu}^{\infty} \\ &= \mu + \sigma\end{aligned}$$

D.h. der Erwartungswert einer verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit Shape-Parameter $\xi \in \mathbb{R}$, Lokalisationsparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Skalierungsparameter $\sigma > 0$ existiert genau dann, wenn $\xi < 1$ gilt und ist dann gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \mu + \frac{\sigma}{1 - \xi}.$$

Aufgabe 9

- a) Aufgrund der gegebenen Voraussetzungen und $\xi = 0,8 \neq 0$ ist durch

$$\widehat{\text{VaR}}_q(X) = u + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \left(\left(\frac{1-q}{\widehat{F}_X(u)} \right)^{-\widehat{\xi}} - 1 \right) \quad (2)$$

mit

$$\widehat{F}_X(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{]u, \infty)}(X_i) \quad (3)$$

ein sinnvoller Schätzer für den Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ gegeben (vgl. Abschnitt 7.8).

Mit (3) resultiert für $n = 200$ und $u = 1$ die Schätzung $\widehat{F}_X(u) = \frac{24}{200} = 0,12$.

Wird dieser Wert zusammen mit $u = 1$ sowie $\widehat{\xi} = 0,8$ und $\widehat{\sigma} = 0,65$ in (2) eingesetzt, erhält man für den Value-at-Risk zu den Sicherheitsniveaus $q = 95\%$, 99% und $q = 99,9\%$ die folgenden Schätzungen:

$$\widehat{\text{VaR}}_{95\%}(X) = 1,82, \quad \widehat{\text{VaR}}_{99\%}(X) = 6,12 \quad \text{und} \quad \widehat{\text{VaR}}_{99,9\%}(X) = 37,6.$$

- b) Aufgrund der gegebenen Voraussetzungen und $\xi = 0,8 < 1$ ist durch

$$\widehat{\text{ES}}_q(X) = \frac{\widehat{\text{VaR}}_q(X)}{1 - \widehat{\xi}} + \frac{\widehat{\sigma} - \widehat{\xi}u}{1 - \widehat{\xi}}$$

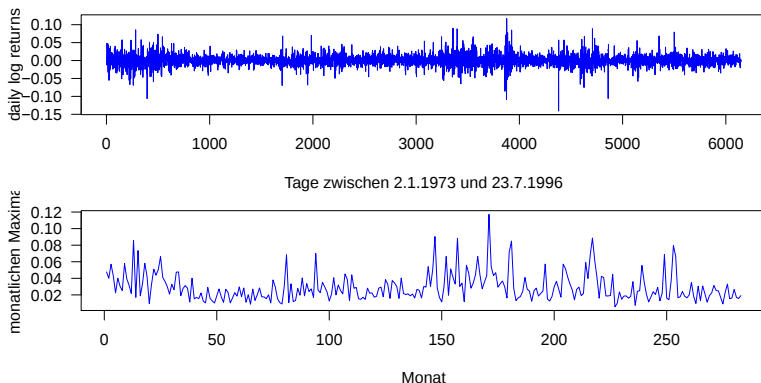
ein sinnvoller Schätzer für den Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ gegeben (vgl. Abschnitt 7.8).

Mit $u = 1$, $\widehat{\xi} = 0,8$, $\widehat{\sigma} = 0,65$ und dem Ergebnis aus Teilaufgabe a) erhält man für den Expected-Shortfall zu den Sicherheitsniveaus $q = 95\%$, 99% und $q = 99,9\%$ die folgenden Schätzungen:

$$\widehat{\text{ES}}_{95\%}(X) = 8,35, \quad \widehat{\text{ES}}_{99\%}(X) = 29,85 \quad \text{und} \quad \widehat{\text{ES}}_{99,9\%}(X) = 187,25.$$

Aufgabe 10

- a) Die folgende Abbildung zeigt die Zeitreihe mit den täglichen logarithmierten Renditen der BMW-Aktie vom 02.01.1973 bis 23.07.1996 (6146 Beobachtungen) und die 283 zugehörigen Monatsmaxima.



- b) Für die drei Parameter ξ , μ und σ resultieren die folgenden ML-Schätzungen und Standardabweichungen:

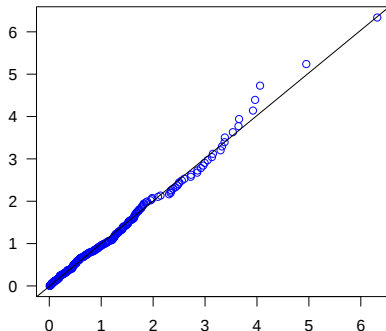
	Parameterschätzung	Standardabweichung	
ξ	0,2208	0,0538	signifikant
μ	0,0211	0,0007	signifikant
σ	0,0102	0,0005	signifikant

Die Parameterschätzung für ξ ist signifikant von 0 verschieden. Mit $\hat{\xi} = 0,2208$ resultiert die Fréchet-Verteilung

$$\hat{F}_{0,2208}(x; 0,0211, 0,0102) = \exp \left(- \left(1 + 0,2208 \cdot \frac{x - 0,0211}{0,0102} \right)^{-1/0,2208} \right)$$

für alle $x > -\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} + \hat{\mu}$ (vgl. Abbildung 7.4).

Der folgende QQ-Plot lässt auf eine zufriedenstellende Anpassungsgüte schließen.



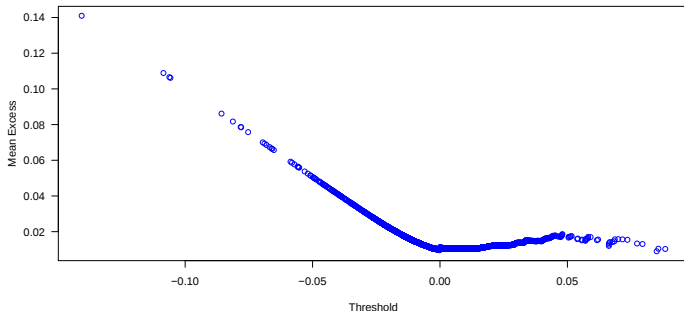
c) Mit

$$\hat{x}(p) = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(1 - [-\ln(1-p)]^{-\hat{\xi}} \right)$$

(vgl. Abschnitt 7.5) erhält man für die Überschreitungswahrscheinlichkeiten $p = 0,1; 0,05$ und $0,01$ die folgenden Wiederkehrwerte (Return Levels)

$$\hat{x}(0,1) = 5,07\%, \quad \hat{x}(0,05) = 6,37\% \quad \text{und} \quad \hat{x}(0,01) = 10,21\%.$$

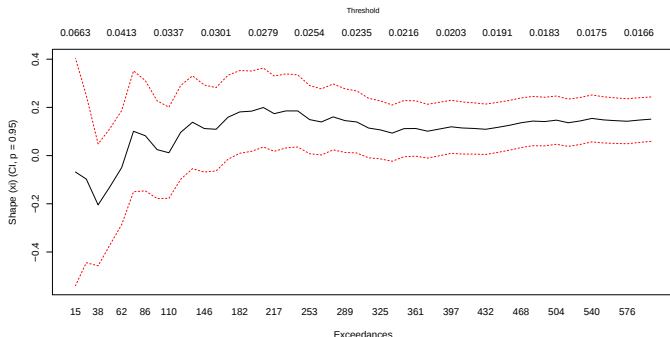
- d) Der Mean-excess-Plot ist schwierig zu interpretieren. Ignoriert man das Verhalten für die höchsten Schwellenwerte, dann erscheint z.B. ein Schwellenwert von $u = 0,02$ plausibel.



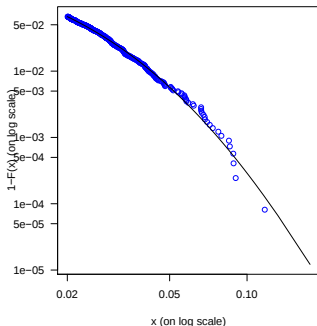
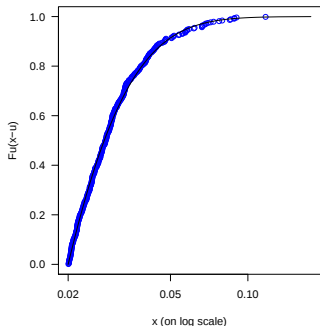
Bei der Wahl des Schwellenwerts $u = 0,02$ erhält man die untenstehenden ML-Schätzungen:

Parameter	ML-Schätzung	Standardabweichung	
ξ	0,1154	0,0559	signifikant
σ	0,0106	0,0008	signifikant

Die folgende Abbildung zeigt die ML-Schätzung für ξ in Abhängigkeit vom Schwellenwert u und der Anzahl der zugehörigen Überschreitungen. Es ist zu erkennen, dass die ML-Schätzungen für ξ ab $u = 0,02$ sehr stabil sind.



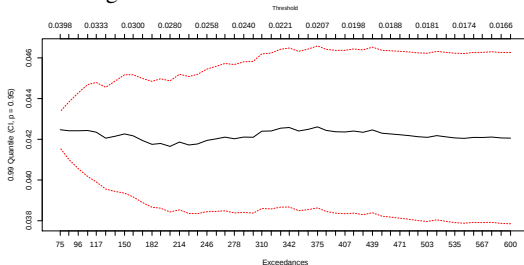
- e) Die folgende Abbildung (links) zeigt, dass die verallgemeinerte Pareto-Verteilung für die Excess-Verteilung F_X^u mit $u = 0,02$ eine gute Anpassung für die empirische Verteilung der Überschreitungen $Y = X - u | X > u$ liefert. Der log-log-Plot (rechts) bestätigt dies und zeigt, dass auch im rechten Tail die Anpassungsqualität gut ist.



- f) Die folgende Tabelle zeigt für die verschiedenen Sicherheitsniveaus q die resultierenden Schätzungen für $\text{VaR}_q(X)$ und $\text{ES}_q(X)$:

q	$\widehat{\text{VaR}}_q(X)$	$\widehat{\text{ES}}_q(X)$
0,9000	0,01577	0,0272
0,9500	0,0230	0,0354
0,9900	0,0424	0,0573
0,9990	0,0771	0,0965
0,9999	0,1224	0,1477

Aus der folgenden Abbildung ist zu erkennen, dass die Schätzung $\widehat{\text{VaR}}_{0,99}(X)$ bzgl. einer Veränderung des Schwellenwerts u sehr stabil ist.



R-Code:

```

1  ###
2  # Anpassung einer verallgemeinerten Extremwert- und Paretoverteilung
3  # mittels Block-Maxima-Methode bzw. POT-Methode
4  ###
5
6  # Laden des Pakets "evir"
7  library(evir)
8  data(bmw)
9
10 # Ausgabe der Zeitreihe mit den täglichen logarithmieren Renditen
11 par(mfrow=c(2,1),cex=2,mar=c(4,5,1,1))
12 plot.ts(bmw, ylab="daily log returns", xlab="Tage zwischen 2.1.1973 und
13         23.7.1996", col=4, las=1)
14
15 # Anpassung einer verallgemeinerten Extremwertverteilung and die monatlichen
16 # Maxima mittels Block-Maxima-Methode
17 fit<-gev(bmw, block="month")
18 plot.ts(fit$data, ylab="monatlichen Maxima", xlab="Monat", col=4,las=1)
19
20 # Parameterschätzungen, Standardabweichungen und Varianz-Kovarianz-Matrix
21 fit$par.ests
22 fit$par.ses
23 fit$varcov
24
25 # QQ-Plot
26 par(mfrow=c(1,1),cex=2,mar=c(2,2,2,2))
27 plot.gev(fit, col=4, las=1)
28
29 # Ausgabe der Wiederkehrwert für p=0.1, 0.05, 0.01
30 p<-c(0.1,0.05,0.01)
31 x.p<-fit$par.ests[3]
32 -fit$par.ests[2]/fit$par.ests[1]*(1-(-log(1-p))^( -fit$par.ests[1]))

```

R-Code (Fortsetzung):

```
33
34 # Mean-excess-Plot
35 par(mfrow=c(1,1),cex=1.5,mar=c(4,4,4,4))
36 meplot(bmw, col="blue",las=1)
37
38 # Anpassung einer verallg. Pareto-Verteilung über Schwellenwert u=0.02
39 fit<-gpd(bmw, threshold=0.02)
40 fit$par.est$
41 fit$par.ses
42
43 # ML-Schätzungen für den Shape-Parameter für verschiedene Schwellenwerte u
44 par(mfrow=c(1,1),cex=1.3,mar=c(5,5,5,5))
45 shape(bmw, models=50, start=15, end=600, ci=0.95, revers=FALSE, las=1)
46
47 # Überprüfung der Anpassungsgüte
48 par(mfrow=c(1,2),cex=1.5,mar=c(4,5,3,3))
49 plot(fit, col="blue",lty=2, las=1)
50
51 # Bestimmung des VaR und ES für verschiedene SN
52 q<-c(0.90,0.95,0.99,0.999,0.9999)
53 riskmeasures(fit,q)
54
55 # Ausgabe des 0.95-Konfidenzbands für den VaR zum SN 0.99
56 par(mfrow=c(1,1),cex=1.3,mar=c(5,5,5,5))
57 quant(bmw, p=0.99, models=50, start=75, end=600, ci=0.95, revers=FALSE)
```

Lösungen zu Kapitel 8

Aufgabe 1

- a) Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $0 \leq x_1 \leq 4$ und $0 \leq x_2 \leq 1$ ist die Verteilungsfunktion gegeben durch

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{1}{4} du_2 du_1 \\ &= \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{4} u_2 \right) \Big|_0^{x_2} du_1 \\ &= \int_0^{x_1} \frac{1}{4} x_2 du_1 \\ &= \left(\frac{1}{4} x_2 u_1 \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{1}{4} x_1 x_2 \end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 8.2). Die komplette Verteilungsfunktion von $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ lautet somit

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x_1 \text{ oder } x_2 < 0 \\ \frac{1}{4} x_1 x_2 & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 4 \text{ und } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ x_2 & \text{für } x_1 > 4 \text{ und } 0 \leq x_2 \leq x_1 \\ \frac{1}{4} x_1 & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 4 \text{ und } x_2 > 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- b) Wegen $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ (vgl. Abschnitt 8.2) erhält man:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \leq X_1 \leq 3; 1/2 \leq X_2 \leq 1) &= \mathbb{P}(2 \leq X_1 \leq 3; X_2 \leq 1) - \mathbb{P}(2 \leq X_1 \leq 3; X_2 \leq 1/2) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq 3; X_2 \leq 1) - \mathbb{P}(X_1 \leq 2; X_2 \leq 1) \\ &\quad - (\mathbb{P}(X_1 \leq 3; X_2 \leq 1/2) - \mathbb{P}(X_1 \leq 2; X_2 \leq 1/2)) \\ &= F_{\mathbf{X}}(3, 1) - F_{\mathbf{X}}(2, 1) - F_{\mathbf{X}}(3, 1/2) + F_{\mathbf{X}}(2, 1/2)\end{aligned}$$

Daraus folgt mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \leq X_1 \leq 3; 1/2 \leq X_2 \leq 1) &= \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

- c) Für die Randdichtefunktion von X_1 erhält man für $0 \leq x_1 \leq 4$

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) dx_2 \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} dx_2 \\ &= \left(\frac{1}{4} x_2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 8.2). Die komplette Randdichtefunktion von X_1 lautet somit:

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Völlig analog erhält man für die Randdichtefunktion von X_2 für $0 \leq x_2 \leq 1$

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) dx_1 \\ &= \int_0^4 \frac{1}{4} dx_1 \\ &= \left(\frac{1}{4} x_1 \right) \Big|_0^4 = 1. \end{aligned}$$

Die komplette Randdichtefunktion von X_2 lautet somit:

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- d) Für die bedingte Dichtefunktion $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ erhält man mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe c) für $0 \leq x_1 \leq 4$ und $0 \leq x_2 \leq 1$

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$

(vgl. Abschnitt 8.2). Völlig analog erhält man für die bedingte Dichtefunktion $f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$ mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe c) für $0 \leq x_1 \leq 4$ und $0 \leq x_2 \leq 1$

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \frac{f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Aufgabe 2

Die Funktion

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 + x_2 < 0 \\ 1 & \text{für } x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

besitzt wesentliche Eigenschaften einer Verteilungsfunktion. Denn sie ist in den beiden Komponenten monoton wachsend, sie ist rechtseitig stetig und nimmt nur Werte im Intervall $[0, 1]$ an. Dennoch ist sie keine Verteilungsfunktion, wie bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten schnell deutlich wird. Zum Beispiel würde man mit ihr die folgende negative Wahrscheinlichkeit erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-1 \leq X_1 \leq 1; 0 \leq X_2 \leq 2) &= \mathbb{P}(-1 \leq X_1 \leq 1; X_2 \leq 2) - \mathbb{P}(-1 \leq X_1 \leq 1; X_2 \leq 0) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq 1; X_2 \leq 2) - \mathbb{P}(X_1 \leq -1; X_2 \leq 2) \\ &\quad - (\mathbb{P}(X_1 \leq 1; X_2 \leq 0) - \mathbb{P}(X_1 \leq -1; X_2 \leq 0)) \\ &= F_{\mathbf{X}}(1, 2) - F_{\mathbf{X}}(-1, 2) - F_{\mathbf{X}}(1, 0) + F_{\mathbf{X}}(-1, 0) \\ &= 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0 \end{aligned}$$

Bei (4) kann es sich somit nicht um eine Verteilungsfunktion handeln.

Aufgabe 3

- a) Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $0 \leq x_1 \leq 1$ und $0 \leq x_2 \leq 1$ ist die Verteilungsfunktion gegeben durch

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{1}{2} (4u_1 u_2 + 1) du_2 du_1 \\ &= \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2} (2u_1 u_2^2 + u_2) \right) \Big|_0^{x_2} du_1 \\ &= \int_0^{x_1} \frac{1}{2} (2u_1 x_2^2 + x_2) du_1 \\ &= \left(\frac{1}{2} (u_1^2 x_2^2 + u_1 x_2) \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{1}{2} x_1 x_2 (x_1 x_2 + 1) \end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 8.2). Die komplette Verteilungsfunktion von $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ lautet somit

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x_1 \text{ oder } x_2 < 0 \\ \frac{1}{2} x_1 x_2 (x_1 x_2 + 1) & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ und } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{2} x_2 (x_2 + 1) & \text{für } x_1 > 1 \text{ und } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ \frac{1}{2} x_1 (x_1 + 1) & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ und } x_2 > 1 \\ 1 & \text{für } x_1 > 1 \text{ und } x_2 > 1 \end{cases}.$$

b) Für die Randdichtefunktion von X_1 erhält man für $0 \leq x_1 \leq 1$

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) dx_2 \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (4x_1x_2 + 1) dx_2 \\ &= \left(x_1x_2^2 + \frac{1}{2}x_2 \right) \Big|_0^1 = x_1 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 8.2). Die komplette Randdichtefunktion von X_1 lautet somit:

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Völlig analog erhält man für die Randdichtefunktion von X_2 für $0 \leq x_2 \leq 1$

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) dx_1 \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (4x_1x_2 + 1) dx_1 \\ &= \left(x_2x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 \right) \Big|_0^1 = x_2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die komplette Randdichtefunktion von X_2 lautet somit:

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} x_2 + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zum Beispiel erhält man speziell für $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$:

$$f_{X_1}(1/4) \cdot f_{X_2}(1/4) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \neq f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{5}{8}$$

Die beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 des zweidimensionalen Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ sind daher nicht stochastisch unabhängig (vgl. Abschnitt 8.2).

- c) Für die bedingte Dichtefunktion $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ erhält man mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe b) für $0 \leq x_2 \leq 1$

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \begin{cases} \frac{4x_1x_2+1}{2x_2+1} & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 8.2).

Damit erhält man für bedingte Verteilungsfunktion für $0 \leq x_2 \leq 1$ und $0 \leq x_1 \leq 1$

$$\begin{aligned} F_{X_1|X_2}(x_1|x_2) &= \int_0^{x_1} f_{X_1|X_2}(u_1|x_2) du_1 \\ &= \int_0^{x_1} \frac{4u_1x_2 + 1}{2x_2 + 1} du_1 \\ &= \left(\frac{2u_1^2x_2 + u_1}{2x_2 + 1} \right) \Bigg|_0^{x_1} \\ &= \frac{2x_1^2x_2 + x_1}{2x_2 + 1} \end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 8.2). Die komplette bedingte Verteilungsfunktion für $0 \leq x_2 \leq 1$ lautet somit

$$F_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 < 0 \\ \frac{2x_1^2x_2 + x_1}{2x_2 + 1} & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 1 & \text{für } x_1 > 1 \end{cases}.$$

Speziell für $x_2 = \frac{1}{4}$ erhält man daraus

$$f_{X_1|X_2}(x_1|1/4) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x_1 + 1) & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$F_{X_1|X_2}(x_1|1/4) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 < 0 \\ \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{2}{3}x_1 & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 1 & \text{für } x_1 > 1 \end{cases}.$$

Aufgabe 4

- a) Da die Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, x_3)$ für $x_1, x_2, x_3 > 0$ in die beiden Faktoren

$$\frac{12}{(1+x_1+x_2)^5} \quad \text{und} \quad \frac{3}{(1+x_3)^4}$$

mit

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{12}{(1+x_1+x_2)^5} dx_1 dx_2 &= \int_0^\infty \left(-\frac{3}{(1+x_1+x_2)^4} \right) \Bigg|_0^\infty dx_2 \\ &= \int_0^\infty \frac{3}{(1+x_2)^4} dx_2 \\ &= \left(-\frac{1}{(1+x_2)^3} \right) \Bigg|_0^\infty = 1 \end{aligned}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{3}{(1+x_3)^4} dx_3 = - \left(-\frac{1}{(1+x_3)^3} \right) \Bigg|_0^\infty = 1$$

faktorisiert werden kann und eine weitere Faktorisierung von $\frac{12}{(1+x_1+x_2)^5}$ nicht möglich ist, sind der zweidimensionale Zufallsvektor $(X_1, X_2)^T$ und X_3 stochastisch unabhängig, aber nicht die beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 (vgl. Abschnitt 8.2).

b) Aus dem Ergebnis von Teilaufgabe a) folgt, dass

$$\text{Cov}(X_1, X_3) = \text{Cov}(X_2, X_3) = 0$$

gilt. Für die Randdichtefunktionen der drei Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 erhält man mit dem Ergebnis von Teilaufgabe a)

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \frac{12}{(1+x_1+x_2)^5} dx_2 = \frac{3}{(1+x_1)^4} \quad \text{für } x_1 > 0$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^\infty \frac{12}{(1+x_1+x_2)^5} dx_1 = \frac{3}{(1+x_2)^4} \quad \text{für } x_2 > 0$$

$$f_{X_3}(x_3) = \frac{3}{(1+x_3)^4} \quad \text{für } x_3 > 0$$

(vgl. Abschnitt 8.2). D.h. alle drei Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 haben die gleiche Randdichtefunktion und damit auch den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz.

Mit Hilfe von partieller Integration erhält man für den Erwartungswert von X_1, X_2 und X_3 :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_1] &= \mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_3] = \int_0^{\infty} \frac{3x_1}{(1+x_1)^4} dx_1 \\
 &= \left(-\frac{x_1}{(1+x_1)^3} \right) \Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x_1)^3} dx_1 \\
 &= 0 - 0 + \left(-\frac{1}{2(1+x_1)^2} \right) \Bigg|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Ebenfalls mit Hilfe von partieller Integration folgt für die Varianz:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_1) &= \text{Var}(X_2) = \text{Var}(X_3) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{3x_1^2}{(1+x_1)^4} dx_1 - \frac{1}{4} \\
 &= \left(-\frac{x_1^2}{(1+x_1)^3} \right) \Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2x_1}{(1+x_1)^3} dx_1 - \frac{1}{4} \\
 &= 0 - 0 + \left(-\frac{x_1}{(1+x_1)^2} \right) \Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x_1)^2} dx_1 - \frac{1}{4} \\
 &= 0 - 0 + \left(-\frac{1}{1+x_1} \right) \Bigg|_0^{\infty} - \frac{1}{4} = 0 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Mit partieller Integration erhält man für die Kovarianz von X_1 und X_2 :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_1, X_2) &= \mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2] \\&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{12x_1 x_2}{(1+x_1+x_2)^5} dx_1 dx_2 - \frac{1}{4} \\&= \int_0^\infty \left(-\frac{3x_1 x_2}{(1+x_1+x_2)^4} \right) \Big|_0^\infty dx_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{3x_2}{(1+x_1+x_2)^4} dx_1 dx_2 - \frac{1}{4} \\&= 0 - 0 + \int_0^\infty \left(-\frac{x_2}{(1+x_1+x_2)^3} \right) \Big|_0^\infty dx_2 - \frac{1}{4} \\&= 0 + \int_0^\infty \frac{x_2}{(1+x_2)^3} dx_2 - \frac{1}{4} \\&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Mit diesen Ergebnissen und der Symmetrie der Varianz-Kovarianzmatrix erhält man für $\mathbf{X}$ schließlich die Varianz-Kovarianzmatrix

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(vgl. Abschnitt 8.2).

- c) Gemäß des Ergebnisses von Teilaufgabe a) sind der zweidimensionale Zufallsvektor $(X_1, X_2)^T$ und die Zufallsvariable X_3 stochastisch unabhängig. Zusammen mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe b) folgt daraus:

$$\mathbb{E}[X_1 X_3] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{E}[X_1 | X_3 = x_3] = \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}$$

$$\text{Var}(X_1 | X_3 = x_3) = \text{Var}(X_1) = \frac{3}{4}$$

- d) Mit der bedingten Dichtefunktion

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \begin{cases} \frac{\frac{12}{(1+x_1+x_2)^5}}{\frac{3}{(1+x_2)^4}} & \text{für } x_1, x_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 8.2) erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 | X_2 = x_2] &= \int_0^\infty x_1 f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) dx_1 \\ &= \frac{(1+x_2)^4}{3} \int_0^\infty \frac{12x_1}{(1+x_1+x_2)^5} dx_1 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von partieller Integration folgt daraus weiter für $x_2 > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1|X_2 = x_2] &= \frac{(1+x_2)^4}{3} \int_0^\infty \frac{12x_1}{(1+x_1+x_2)^5} dx_1 \\ &= \frac{(1+x_2)^4}{3} \left(\left(-\frac{3x_1}{(1+x_1+x_2)^4} \right) \right)_0^\infty + \int_0^\infty \frac{3}{(1+x_1+x_2)^4} dx_1 \\ &= \frac{(1+x_2)^4}{3} \left(0 - 0 + \left(-\frac{1}{(1+x_1+x_2)^3} \right) \right)_0^\infty \\ &= \frac{(1+x_2)^4}{3} \left(0 + \frac{1}{(1+x_2)^3} \right) = \frac{1}{3}(1+x_2)\end{aligned}$$

Wegen $f_{X_1}(x_1) = f_{X_2}(x_2)$ (vgl. Ergebnis in Teilaufgabe b) gilt

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \frac{f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \frac{f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$$

und man erhält daher völlig analog für $x_1 > 0$:

$$\mathbb{E}[X_2|X_1 = x_1] = \int_0^\infty x_2 f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) dx_2 = \dots = \frac{1}{3}(1+x_1)$$

Aufgabe 5

Die Funktion $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ist stetig differenzierbar und injektiv. Ferner gilt

$$\mathbf{J}_h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Da die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar ist, gilt

$$\det(\mathbf{J}_h(\mathbf{x})) = \det(\mathbf{A}) \neq 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Durch Auflösen von $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{y}$ nach $\mathbf{x}$ erhält man $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})$ und die Umkehrfunktion von h ist somit gegeben durch

$$g(\mathbf{y}) := h^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

mit $\det(\mathbf{J}_g(\mathbf{y})) = \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$ für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Mit dem Transformationssatz für multivariate Dichtefunktionen (vgl. Abschnitt 8.2) erhält man daher für $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ die Dichte

$$f_{\mathbf{Y}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{y} \mapsto \frac{1}{|\det(\mathbf{A})|} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})).$$

Aufgabe 6

- a) Die Funktion $h : (1, \infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto (x_1 \cdot x_2, x_2)^T$ ist stetig differenzierbar und injektiv. Ferner gilt

$$\mathbf{J}_h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det(\mathbf{J}_h(\mathbf{x})) = x_2 \neq 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \in (1, \infty)^2.$$

Für h erhält man durch Auflösen des linearen Gleichungssystems

$$y_1 = x_1 \cdot x_2$$

$$y_2 = x_2$$

nach x_1 und x_2 die Umkehrfunktion

$$g(\mathbf{y}) = h^{-1}(\mathbf{y}) = \left(\frac{y_1}{y_2}, y_2 \right)^T$$

mit dem Definitionsbereich

$$h((1, \infty)^2) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : y_1 > y_2 > 1 \right\}.$$

Die Determinante der Jakobi-Matrix von g ist gegeben durch

$$\det(\mathbf{J}_g(\mathbf{y})) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{y_2} & -\frac{y_1}{y_2^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{y_2} \quad \text{für } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y_1 > y_2 > 1.$$

Mit dem Transformationssatz für multivariate Dichtefunktionen (vgl. Abschnitt 8.2) erhält man daher für $\mathbf{Y} = h(\mathbf{X}) = (X_1 \cdot X_2, X_2)^T$ die Dichte

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{y} \mapsto f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} f_{\mathbf{X}}(g(\mathbf{y})) |\det(\mathbf{J}_g(\mathbf{y}))| & \text{für } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y_1 > y_2 > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{6}{y_1^3/y_2^3 \cdot y_2^4} \frac{1}{y_2} & \text{für } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y_1 > y_2 > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{6}{y_1^3 y_2^2} & \text{für } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } y_1 > y_2 > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

b) Für die Randdichtefunktionen von Y_1 und Y_2 erhält man (vgl. Abschnitt 8.2):

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_1^{y_1} \frac{6}{y_1^3 u_2^2} du_2 = \left(-\frac{6}{y_1^3 u_2} \right) \Big|_1^{y_1} = \frac{6}{y_1^3} - \frac{6}{y_1^4} \quad \text{für } y_1 > 1$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{y_2}^{\infty} \frac{6}{u_1^3 y_2^2} du_1 = \left(-\frac{3}{u_1^2 y_2^2} \right) \Big|_{y_2}^{\infty} = 0 + \frac{3}{y_2^4} = \frac{3}{y_2^4} \quad \text{für } y_2 > 1$$

- c) Die bedingte Dichtfunktion von Y_1 unter der Bedingung $Y_2 = 2$ und die bedingte Dichtfunktion von Y_2 unter der Bedingung $Y_1 = 2$ sind gegeben durch

$$f_{Y_1|Y_2}(y_1|2) = \frac{f_{(Y_1, Y_2)}(y_1, 2)}{f_{Y_2}(2)} = \frac{\frac{6}{y_1^3 2^2}}{\frac{3}{2^4}} = \frac{8}{y_1^3} \quad \text{für } y_1 > y_2 = 2$$

bzw.

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2|2) = \frac{f_{(Y_1, Y_2)}(2, y_2)}{f_{Y_1}(2)} = \frac{\frac{6}{2^3 y_2^2}}{\frac{6}{2^3} - \frac{6}{2^4}} = \frac{2}{y_2^2} \quad \text{für } 2 > y_2 > 1.$$

Aufgabe 7

- a) Aus der angegebenen Varianz-Kovarianzmatrix Σ ist ersichtlich, dass der zweidimensionale Zufallsvektor $(X_1, X_2)^T$ und die Zufallsvariable X_3 stochastisch unabhängig sind. Daher stimmt die Verteilung von X_3 unter der Bedingung $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ mit der Verteilung von X_3 überein. D.h. es handelt sich bei der Verteilung von X_3 unter der Bedingung $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$ um eine $N(3, 9)$ -Verteilung (vgl. Abschnitt 8.3).
- b) Da der zweidimensionale Zufallsvektor $(X_1, X_2)^T$ und die Zufallsvariable X_3 stochastisch unabhängig sind, stimmt die Verteilung von X_1 unter der Bedingung $X_2 = 0$ und $X_3 = 0$ mit der Verteilung von X_1 unter der Bedingung $X_2 = 0$ überein. Die Verteilung von X_1 ist folglich eine eindimensionale Normalverteilung mit dem bedingten Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X_1 | X_2 = 0] = \mathbb{E}[X_1] + \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\text{Var}(X_2)}(0 - \mathbb{E}[X_2]) = 1 + \frac{0,6}{4}(0 - 2) = 0,7$$

und der bedingten Varianz

$$\text{Var}(X_1 | X_2 = 0) = \text{Var}(X_1) - \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)\text{Cov}(X_2, X_1)}{\text{Var}(X_2)} = 1 - \frac{0,6^2}{4} = 0,91$$

(vgl. Abschnitt 8.3). D.h. bei der Verteilung von X_1 unter der Bedingung $X_2 = 0$ und $X_3 = 0$ handelt es sich um eine $N(0,7; 0,91)$ -Verteilung.

- c) Da der zweidimensionale Zufallsvektor $(X_1, X_2)^T$ und die Zufallsvariable X_3 stochastisch unabhängig sind, stimmt die Verteilung von X_2 unter der Bedingung $X_1 = 0$ und $X_3 = 0$ mit der Verteilung von X_2 unter der Bedingung $X_1 = 0$ überein. Die Verteilung von X_2 ist folglich eine eindimensionale Normalverteilung mit dem bedingten Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X_2|X_1 = 0] = \mathbb{E}[X_2] + \frac{\text{Cov}(X_2, X_1)}{\text{Var}(X_1)}(0 - \mathbb{E}[X_1]) = 2 + \frac{0,6}{1}(0 - 1) = 1,4$$

und der bedingten Varianz

$$\text{Var}(X_2|X_1 = 0) = \text{Var}(X_2) - \frac{\text{Cov}(X_2, X_1)\text{Cov}(X_1, X_2)}{\text{Var}(X_1)} = 4 - \frac{0,6^2}{1} = 3,64$$

(vgl. Abschnitt 8.3).

- d) Für die beiden bedingten Erwartungswerte erhält man

$$\mathbb{E}[X_1|X_2 = x_2] = \mathbb{E}[X_1] + \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\text{Var}(X_2)}(x_2 - \mathbb{E}[X_2]) = 1 + \frac{0,6}{4}(x_2 - 2) = 0,7 + 0,15x_2$$

$$\mathbb{E}[X_2|X_1 = x_1] = \mathbb{E}[X_2] + \frac{\text{Cov}(X_2, X_1)}{\text{Var}(X_1)}(x_1 - \mathbb{E}[X_1]) = 2 + \frac{0,6}{1}(x_1 - 1) = 1,4 + 0,6x_1$$

(vgl. Abschnitt 8.3).

- e) Die Korrelation der beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 des zweidimensionalen Zufallsvektors $(X_1, X_2)^T$ beträgt

$$\text{Corr}(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}} = \frac{0,6}{\sqrt{1 \cdot 4}} = 0,3.$$

Der zweidimensionale Zufallsvektor $(X_1, X_2)^T$ besitzt daher die Dichtefunktion

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi \cdot 1 \cdot 2\sqrt{1-0,3^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-0,3^2)} \left[\left(\frac{x_1-1}{1}\right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cdot 0,3 \left(\frac{x_1-1}{1}\right) \left(\frac{x_2-2}{2}\right) + \left(\frac{x_2-2}{2}\right)^2 \right] \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{0,91}} \exp\left(-\frac{1}{1,82} \left[(x_1-1)^2 - 0,6(x_1-1) \left(\frac{x_2-2}{2}\right) + \left(\frac{x_2-2}{2}\right)^2 \right] \right) \end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 8.3). Es sind daher alle Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gesucht, welche der Gleichung

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{0,91}} \exp\left(-\frac{1}{1,82} \left[(x_1-1)^2 - 0,6(x_1-1) \left(\frac{x_2-2}{2}\right) + \left(\frac{x_2-2}{2}\right)^2 \right] \right) = (16\pi)^{-1}$$

genügen.

Durch eine kurze Umformung folgt daraus weiter

$$(x_1 - 1)^2 - 0,6(x_1 - 1) \left(\frac{x_2 - 2}{2} \right) + \left(\frac{x_2 - 2}{2} \right)^2 = 2,8669.$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich um die Funktionsgleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt $(1, 2)$.

Aufgabe 8

Die Aussage ist in dieser Allgemeinheit falsch, da die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Zufallsvariablen X_1 und X_2 nicht spezifiziert wird. Nur wenn die Zufallsvariablen X_1 und X_2 gemeinsam zweidimensional normalverteilt sind, d.h. wenn

$$(X_1, X_2)^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

gilt (dabei ist $\rho = \text{Corr}(X_1, X_2)$), erhält man

$$X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} \right)$$

(vgl. Abschnitt 8.3). D.h. es gilt $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$ und nur im Fall von $\rho = 0$, also wenn die beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 unkorreliert und damit sogar stochastisch unabhängig sind, gilt

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Aufgabe 9

Aus der Unkorreliertheit der Komponenten $X_1, \dots, X_n$ des n -dimensionalen Zufallsvektors $(X_1, \dots, X_n)^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ folgt, dass die Varianz-Kovarianzmatrix eine Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ von der Gestalt

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

ist. D.h. $\boldsymbol{\Sigma}$ besitzt die Inverse

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Zusammen mit $\det(\Sigma) = \sigma_1^2 \cdots \sigma_n^2$ erhält man damit für die Dichtefunktion des Zufallsvektors $\mathbf{x}$ die Faktorisierung

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1^2 \cdots \sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right) \\ &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \end{aligned}$$

für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. D.h. jedoch die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ sind stochastisch unabhängig (vgl. Abschnitt 8.2).

Aufgabe 10

Für $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt

$$\text{VaR}_q(X) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(q) \quad \text{für } q \in (0, 1) \quad (5)$$

(vgl. Abschnitt 2.5).

a) Es sei

$$(X_1, X_2)^T \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

und $\rho = \text{Corr}(X_1, X_2)$. Es gilt dann

$$X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} \right)$$

(vgl. Abschnitt 8.3). D.h. es gilt $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$.
Zusammen mit (5) liefert dies

$$\text{VaR}_q(X_1 + X_2) = \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \Phi^{-1}(q) \quad \text{für } q \in (0, 1).$$

b) Mit $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ folgt

$$\begin{aligned} X_1 + \dots + X_n = \mathbf{1}^T \mathbf{X} &\sim \underbrace{N(\mathbf{1}^T \boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1})}_{= N(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij})} \end{aligned}$$

mit $\text{Cov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$ für $i, j = 1, \dots, n$ (vgl. Abschnitt 8.3). Zusammen mit (5) liefert dies

$$\begin{aligned} \text{VaR}_q(X_1 + \dots + X_n) &= \mathbf{1}^T \boldsymbol{\mu} + \sqrt{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{1}} \Phi^{-1}(q) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i + \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}} \Phi^{-1}(q) \quad \text{für } q \in (0, 1). \end{aligned}$$

Aufgabe 11

a) Es gilt:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} + \sqrt{W} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

D.h. $\mathbf{X}$ ist von der Form $\boldsymbol{\mu} + \sqrt{W}\mathbf{A}\mathbf{Z}$ mit $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^T \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{E})$ und

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt $W \geq 0$ und W ist von $\mathbf{Z}$ stochastisch unabhängig. Folglich besitzt $\mathbf{X}$ eine Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung (vgl. Abschnitt 8.4).

- b) Da $\mathbf{X}$ eine Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung besitzt, ist die Varianz-Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$ gegeben durch

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[W]\Sigma \quad \text{mit} \quad \Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

(vgl. Abschnitt 8.4). Zusammen mit

$$\mathbb{E}[W] = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 4 = 4 - 3p$$

für $p \in (0, 1)$ liefert dies

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{X}) &= \mathbb{E}[W]\Sigma = (4 - 3p) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= (4 - 3p) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (4 - 3p) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Speziell für $p = \frac{2}{3}$ folgt daraus

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Für $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ gilt

$$X_1 + X_2 = \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Folglich besitzt auch $X_1 + X_2$ eine (eindimensionale) Varianz-gemischte Normalverteilung und damit die Darstellung

$$X_1 + X_2 \stackrel{(d)}{=} \mu + \sqrt{W}\sigma Z \quad \text{mit} \quad Z \sim N(0, 1).$$

Der Lokalisationsparameter μ und der Dispersionsparameter σ sind dabei gegeben durch $\mu = a$ bzw.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^T} \\ &= \sqrt{\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T} \\ &= \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 8.4). D.h. es gilt

$$X_1 + X_2 \stackrel{(d)}{=} a + \sqrt{10W}Z \quad \text{mit} \quad Z \sim N(0, 1).$$

Mit (6) erhält man für die Verteilungsfunktion von $X_1 + X_2$ für $p \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}
 F_{X_1+X_2}(x) &= \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq x) = \mathbb{P}(a + \sqrt{10W}Z \leq x) \\
 &= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x-a}{\sqrt{10W}}\right) \\
 &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x-a}{\sqrt{10W}} \mid W\right)\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sqrt{10W}} \mid W\right)\right] \\
 &= \Phi\left(\frac{x-a}{\sqrt{10 \cdot 1}}\right) \mathbb{P}(W=1) + \Phi\left(\frac{x-a}{\sqrt{10 \cdot 4}}\right) \mathbb{P}(W=4) \\
 &= \Phi\left(\frac{x-a}{\sqrt{10}}\right) p + \Phi\left(\frac{x-a}{2\sqrt{10}}\right) (1-p)
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Aufgabe 12

a) Es gilt:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{W} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

D.h. $\mathbf{X}$ ist von der Form $\boldsymbol{\mu} + \sqrt{W}\mathbf{A}\mathbf{Z}$ mit $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^T \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{E})$ und

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt $W \geq 0$ und W ist von $\mathbf{Z}$ stochastisch unabhängig. Folglich besitzt $\mathbf{X}$ eine Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung (vgl. Abschnitt 8.4).

- b) Da $\mathbf{X}$ eine Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung besitzt, ist die Varianz-Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$ gegeben durch

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}[W]\Sigma \quad \text{mit} \quad \Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

(vgl. Abschnitt 8.4). Zusammen mit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W] &= \int_1^{\infty} w f_W(w) dw = \int_1^{\infty} w \theta w^{-\theta-1} dw \\ &= \left(\frac{\theta}{1-\theta} w^{-\theta+1} \right) \Bigg|_1^{\infty} = \frac{\theta}{\theta-1} \end{aligned}$$

für $\theta > 1$ liefert dies

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{X}) &= \mathbb{E}[W]\Sigma = \frac{\theta}{\theta-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \\ &= \frac{\theta}{\theta-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2\theta}{\theta-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da es sich bei $\text{Cov}(\mathbf{X})$ um eine Diagonalmatrix handelt, sind X_1 und X_2 unkorreliert.

Aufgabe 13

Aus $\mathbf{X} \sim E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$ folgt, dass $\mathbf{X}$ die charakteristische Funktion

$$C_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu}) \phi(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) \quad \text{für } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$$

besitzt (vgl. Abschnitt 8.5). Damit erhält man für $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{b}}(\mathbf{t}) &= \mathbb{E}[\exp(i\mathbf{t}^T (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}))] \\ &= \exp(i\mathbf{t}^T \mathbf{b}) \mathbb{E}[\exp(i\mathbf{t}^T \mathbf{A}\mathbf{X})] \\ &= \exp(i\mathbf{t}^T \mathbf{b}) \mathbb{E}[\exp(i(\mathbf{A}^T \mathbf{t})^T \mathbf{X})] \\ &= \exp(i\mathbf{t}^T \mathbf{b}) C_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}^T \mathbf{t}) \\ &= \exp(i\mathbf{t}^T \mathbf{b}) \exp(i(\mathbf{A}^T \mathbf{t})^T \boldsymbol{\mu}) \phi((\mathbf{A}^T \mathbf{t})^T \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{A}^T \mathbf{t})) \\ &= \exp(i\mathbf{t}^T (\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})) \phi(\mathbf{t}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}^T \mathbf{t}) \end{aligned}$$

für $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Dies ist jedoch die charakteristische Funktion der $E(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T, \phi)$ -Verteilung. Damit ist die Behauptung

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} \sim E(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T, \phi)$$

nachgewiesen.

Aufgabe 14

Aus $\mathbf{X} \sim E(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}, \phi_1)$ und $\mathbf{Y} \sim E(\boldsymbol{\mu}_2, c\boldsymbol{\Sigma}, \phi_2)$ folgt, dass $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ die charakteristischen Funktionen

$$C_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu}_1) \phi_1(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t})$$

bzw.

$$C_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu}_2) \phi_2(\mathbf{t}^T c\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t})$$

für $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ besitzen (vgl. Abschnitt 8.5). Zusammen mit der stochastischen Unabhängigkeit von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ erhält man damit für $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) &= C_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \cdot C_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) \\ &= \exp(i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu}_1) \phi_1(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) \exp(i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu}_2) \phi_2(\mathbf{t}^T c\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) \\ &= \exp(i\mathbf{t}^T (\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2)) \underbrace{\phi_1(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}) \phi_2(\mathbf{t}^T c\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t})}_{=:\tilde{\phi}(\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t})} \end{aligned}$$

für $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Dies ist jedoch die charakteristische Funktion der $E(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}, \tilde{\phi})$ -Verteilung. Damit ist die Behauptung

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} \sim E(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}, \tilde{\phi})$$

nachgewiesen.

Lösungen zu Kapitel 9

Aufgabe 1

a) Es gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = 0$$

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^3] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

Daraus folgt

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0 - 0 = 0.$$

D.h. die Zufallsvariablen X und Y sind unkorreliert.

b) Man erhält:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq -1/4, Y \leq 1/4) &= \mathbb{P}(X \leq -1/4, X^2 \leq 1/4) \\ &= \mathbb{P}(X \leq -1/4 \text{ und } -1/2 \leq X \leq 1/2) \\ &= \mathbb{P}(-1/2 \leq X \leq -1/4) \\ &= \int_{-1/2}^{-1/4} \frac{1}{2} dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x \right) \Big|_{-1/2}^{-1/4} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Wegen

$$\mathbb{P}(X \leq -1/4) = \int_{-1}^{-1/4} \frac{1}{2} dx = \left(\frac{1}{2}x \right) \Big|_{-1}^{-1/4} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{3}{8}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq 1/4) &= \mathbb{P}(-1/2 \leq X \leq 1/2) \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{2} dx = \left(\frac{1}{2}x \right) \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

gilt somit

$$\mathbb{P}(X \leq -1/4, Y \leq 1/4) \neq \mathbb{P}(X \leq -1/4) \cdot \mathbb{P}(Y \leq 1/4).$$

D.h. die Zufallsvariablen X und Y sind nicht stochastisch unabhängig.

Aufgabe 2

- a) Da es sich bei X_1 und X_2 um monoton wachsende Transformationen der gleichen Zufallsvariable Z handelt, sind die beiden Zufallsvariablen perfekt positiv abhängig (komonoton) (vgl. Abschnitt 9.9).
- b) Für $Y \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ gilt $\mathbb{E}[Y^n] = e^{\mu n + \frac{1}{2}\sigma^2 n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Abschnitt 4.8). Aus $Z \sim \text{N}(0, 1)$ und $\sigma Z \sim \text{N}(0, \sigma^2)$ folgt ferner $X_1 \sim \text{LN}(0, 1)$ und $X_2 \sim \text{LN}(0, \sigma^2)$ (vgl. Abschnitt 4.8). Damit erhält man:

$$\mathbb{E}[X_1] = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbb{E}[X_1^2] = e^2$$

$$\mathbb{E}[X_2] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$\mathbb{E}[X_2^2] = e^{2\sigma^2}$$

Ferner gilt:

$$X_1 X_2 = e^Z e^{\sigma Z} = e^{Z(1+\sigma)}$$

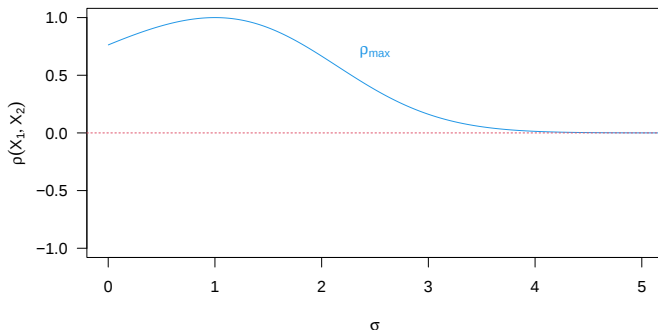
Daraus folgt $X_1 X_2 \sim \text{LN}(0, (1+\sigma)^2)$ und somit

$$\mathbb{E}[X_1 X_2] = e^{\frac{1}{2}(1+\sigma)^2}.$$

Damit erhält man für den linearen Korrelationskoeffizienten von X_1 und X_2 :

$$\begin{aligned}\rho(X_1, X_2) &= \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\text{Var}(X_2)}} \\&= \frac{\mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]}{\sqrt{(\mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2)(\mathbb{E}[X_2^2] - \mathbb{E}[X_2]^2)}} \\&= \frac{e^{\frac{1}{2}(1+\sigma)^2} - e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\sigma^2}}{\sqrt{(e^2 - (e^{\frac{1}{2}})^2)(e^{2\sigma^2} - (e^{\frac{1}{2}\sigma^2})^2)}} \\&= \frac{e^{\frac{1}{2}(1+\sigma)^2} - e^{\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}}}{\sqrt{(e^2 - e)(e^{2\sigma^2} - e\sigma^2)}}$$

- c) Die untenstehende Abbildung zeigt die Werte des linearen Korrelationskoeffizienten $\rho(X_1, X_2)$ in Abhängigkeit von $\sigma > 0$.



Interpretation: Obwohl die beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 komonoton, also perfekt positiv abhängig sind, ist der Wert des linearen Korrelationskoeffizient $\rho(X_1, X_2)$ kleiner als 1 und konvergiert für $\sigma \rightarrow \infty$ sogar gegen 0. Dies zeigt, dass trotz perfekter positiver Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen der Wert des linearen Korrelationskoeffizienten sehr klein sein kann. Eine kleine lineare Korrelation impliziert folglich keine schwache Abhängigkeit.

Aufgabe 3

a) Wegen $Y_1 \stackrel{(d)}{=} -Y_1$ erhält man:

$$\begin{aligned} F_{Y_2}(y) &= \mathbb{P}(Y_2 \leq y) = \mathbb{P}(VY_1 \leq y) \\ &= \mathbb{P}(VY_1 \leq y | V = 1)\mathbb{P}(V = 1) + \mathbb{P}(VY_1 \leq y | V = -1)\mathbb{P}(V = -1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_1 \leq y) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(-Y_1 \leq y) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_1 \leq y) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_1 \leq y) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 \leq y) = F_{Y_1}(y) \end{aligned}$$

D.h. es gilt $Y_2 \sim N(0, 1)$. Ferner erhält man:

$$\begin{aligned} \rho(Y_1, Y_2) &= \text{Cov}(Y_1, Y_2) = \text{Cov}(Y_1, VY_1) \\ &= \mathbb{E}[Y_1(VY_1)] \\ &= \mathbb{E}[VY_1^2] \\ &= \mathbb{E}[Y_1^2]\mathbb{P}(V = 1) - \mathbb{E}[Y_1^2]\mathbb{P}(V = -1) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

D.h. analog zu X_1 und X_2 sind auch Y_1 und Y_2 unkorreliert.

- b) Wegen $(X_1, X_2)^T \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{E})$ erhält man für den Value-at-Risk von $X_1 + X_2$ (vgl. Abschnitt 9.2):

$$\begin{aligned} \text{VaR}_q(X_1 + X_2) &= \mathbb{E}[X_1 + X_2] + \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \rho(X_i, X_j) (\text{VaR}_q(X_i) - \mathbb{E}[X_i]) (\text{VaR}_q(X_j) - \mathbb{E}[X_j])} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 \rho(X_i, X_j) \text{VaR}_q(X_i) \text{VaR}_q(X_j)} \\ &= \sqrt{\text{VaR}_q(X_1)^2 + \text{VaR}_q(X_2)^2} = \sqrt{2\text{VaR}_q(X_1)^2} = \sqrt{2}\text{VaR}_q(X_1) \end{aligned}$$

Für $Y_1 + Y_2$ und $q \in (F_{Y_1+Y_2}(0), 1)$ folgt:

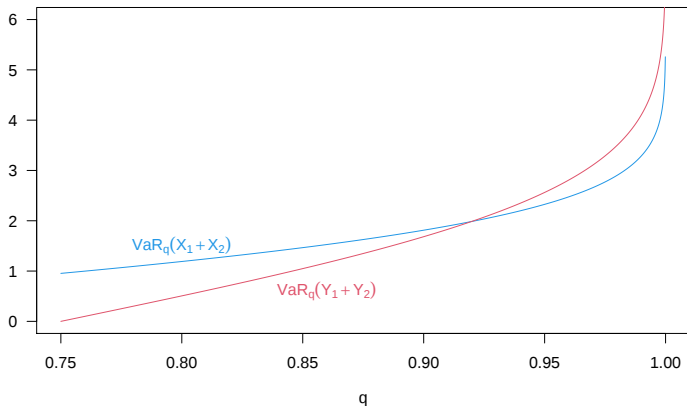
$$\begin{aligned} 1 - q &= \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 > \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 + VY_1 > \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2) | V = 1) \mathbb{P}(V = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(Y_1 + VY_1 > \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2) | V = -1) \mathbb{P}(V = -1) \\ &= \mathbb{P}(2Y_1 > \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)) \mathbb{P}(V = 1) + 0 \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_1 > \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)/2) \end{aligned}$$

Für den Value-at-Risk von $Y_1 + Y_2$ erhält man damit:

$$\begin{aligned} q &= \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 > \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_1 > \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)/2) \\ &= 1 - \frac{1}{2} (1 - \mathbb{P}(Y_1 \leq \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)/2)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_1 \leq \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)/2) \end{aligned}$$

Wegen $Y_1 \stackrel{(d)}{=} X_1$ gilt somit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_1 \leq \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)/2) = q &\iff 1 + \mathbb{P}(Y_1 \leq \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)/2) = 2q \\ &\iff \mathbb{P}(Y_1 \leq \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)/2) = 2q - 1 \\ &\iff \frac{\text{VaR}_q(Y_1 + Y_2)}{2} = \text{VaR}_{2q-1}(Y_1) \\ &\iff \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2) = 2\text{VaR}_{2q-1}(Y_1) \\ &\iff \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2) = 2\text{VaR}_{2q-1}(X_1) \end{aligned}$$



- c) Die beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 bzw. Y_1 und Y_2 besitzen jeweils die gleiche Verteilung, nämlich die Standardnormalverteilung. Ferner sind X_1 und X_2 bzw. Y_1 und Y_2 unkorreliert. Dennoch gilt

$$\text{VaR}_q(X_1 + X_2) \neq \text{VaR}_q(Y_1 + Y_2).$$

D.h. aus den Verteilungsfunktionen zweier Zufallsvariablen und deren linearen Korrelationskoeffizienten lassen sich i.A. keine Schlüsse über die Verteilungsfunktion der bivariaten Zufallsvektoren $(X_1, X_2)^T$ bzw. $(Y_1, Y_2)^T$ ziehen. Zur eindeutigen Festlegung der Verteilungsfunktion der Zufallsvektoren werden die Randverteilungen und die Abhängigkeitsstruktur (Copula) zwischen den Zufallsvariablen benötigt. Die Abhängigkeitsstrukturen (Copula) von $(X_1, X_2)^T$ und $(Y_1, Y_2)^T$ unterscheiden sich jedoch.

Aufgabe 4

Für die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $\mathbf{U} = (U, 1 - U, 1 - U)^T$ gilt:

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3) &= F_{\mathbf{U}}(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{P}(U \leq u_1, 1 - U \leq u_2, 1 - U \leq u_3) \\ &= \mathbb{P}(U \leq u_1, 1 - u_2 \leq U, 1 - u_3 \leq U) \\ &= \mathbb{P}(\max\{1 - u_2, 1 - u_3\} \leq U \leq u_1) \\ &= \mathbb{P}(1 - \min\{u_2, u_3\} \leq U \leq u_1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } u_1 < 1 - \min\{u_2, u_3\} \\ u_1 - (1 - \min\{u_2, u_3\}) & \text{für } u_1 \geq 1 - \min\{u_2, u_3\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } u_1 < 1 - \min\{u_2, u_3\} \\ \min\{u_2, u_3\} + u_1 - 1 & \text{für } u_1 \geq 1 - \min\{u_2, u_3\} \end{cases} \\ &= \max\{\min\{u_2, u_3\} + u_1 - 1, 0\} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

- a) Für $x_1, x_2 \geq 0$ ist die Verteilungsfunktion von $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ gegeben durch (vgl. Abschnitt 8.2):

$$\begin{aligned}
 F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} u_1 e^{-u_1(u_2+1)} du_1 du_2 \\
 &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} u_1 e^{-u_1(u_2+1)} du_2 du_1 \\
 &= \int_0^{x_1} -e^{-u_1(u_2+1)} \Big|_0^{x_2} du_1 \\
 &= \int_0^{x_1} \left(-e^{-u_1(x_2+1)} + e^{-u_1} \right) du_1 \\
 &= \left(\frac{1}{x_2+1} e^{-u_1(x_2+1)} - e^{-u_1} \right) \Big|_0^{x_1} \\
 &= \frac{1}{x_2+1} e^{-x_1(x_2+1)} - e^{-x_1} - \left(\frac{1}{x_2+1} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{x_2+1} e^{-x_1(x_2+1)} - e^{-x_1} + \frac{x_2}{x_2+1}.
 \end{aligned}$$

D.h. die Verteilungsfunktion von $\mathbf{X}$ lautet somit

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_2+1} e^{-x_1(x_2+1)} - e^{-x_1} + \frac{x_2}{x_2+1} & \text{für } x_1, x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (7)$$

b) Für $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ erhält man (vgl. Abschnitt 8.2)

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_2+1} e^{-x_1(x_2+1)} - e^{-x_1} + \frac{x_2}{x_2+1} \right) = 1 - e^{-x_1}$$

bzw.

$$F_{X_2}(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_2+1} e^{-x_1(x_2+1)} - e^{-x_1} + \frac{x_2}{x_2+1} \right) = \frac{x_2}{x_2+1}.$$

D.h. die Randverteilungsfunktionen von X_1 und X_2 lauten

$$F_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 1 - e^{-x_1} & \text{für } x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad F_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \frac{x_2}{x_2+1} & \text{für } x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Folglich gilt

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \neq F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$$

und die Risiken X_1 und X_2 sind daher stochastisch abhängig (vgl. Abschnitt 8.2).

c) Für $x_1, x_2 \geq 0$ gilt

$$u_1 = 1 - e^{-x_1} \iff e^{-x_1} = 1 - u_1 \iff x_1 = -\ln(1 - u_1)$$

und

$$u_2 = \frac{x_2}{x_2 + 1} \iff x_2(u_2 - 1) = -u_2 \iff x_2 = \frac{u_2}{1 - u_2}.$$

D.h. die verallgemeinerten inversen Verteilungsfunktionen (Quantilfunktionen) sind für $u_1, u_2 \in [0, 1)$ gegeben durch

$$F_{X_1}^{-1}(u_1) = -\ln(1 - u_1) \quad \text{bzw.} \quad F_{X_2}^{-1}(u_2) = \frac{u_2}{1 - u_2}.$$

Zusammen mit (7) und dem Satz von Sklar (vgl. Abschnitt 9.4) liefert dies für die Copula des Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= F_{\mathbf{X}}(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)) \\ &= \frac{1}{\frac{u_2}{1-u_2} + 1} e^{\ln(1-u_1) \left(\frac{u_2}{1-u_2} + 1 \right)} - e^{\ln(1-u_1)} + \frac{\frac{u_2}{1-u_2}}{\frac{u_2}{1-u_2} + 1} \\ &= (1 - u_2)(1 - u_1)^{\frac{1}{1-u_2}} - 1 + u_1 + u_2. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

- a) Für $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ erhält man (vgl. Abschnitt 8.2)

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x_1) &= \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-(x_1+x_2+\vartheta x_1 x_2)} \right) = 1 - e^{-x_1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_{X_2}(x_2) &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-(x_1+x_2+\vartheta x_1 x_2)} \right) = 1 - e^{-x_2}. \end{aligned}$$

D.h. die Randverteilungsfunktionen von X_1 und X_2 lauten

$$F_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 1 - e^{-x_1} & \text{für } x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad F_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 1 - e^{-x_2} & \text{für } x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

D.h. die Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$ (vgl. Abschnitt 4.7).

b) Für $x_1, x_2 \geq 0$ gilt:

$$u_1 = 1 - e^{-x_1} \iff e^{-x_1} = 1 - u_1 \iff x_1 = -\ln(1 - u_1)$$

Völlig analog erhält man $x_2 = -\ln(1 - u_2)$.

D.h. die verallgemeinerten inversen Verteilungsfunktionen (Quantilfunktionen) sind für $u_1, u_2 \in [0, 1)$ gegeben durch

$$F_{X_1}^{-1}(u_1) = -\ln(1 - u_1) \quad \text{bzw.} \quad F_{X_2}^{-1}(u_2) = -\ln(1 - u_2).$$

Zusammen mit $F_{\mathbf{X}}$ und dem Satz von Sklar (vgl. Abschnitt 9.4) liefert dies für den Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ die Copula

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= F_{\mathbf{X}}(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)) \\ &= 1 - e^{\ln(1-u_1)} - e^{\ln(1-u_2)} + e^{(-\ln(1-u_1) - \ln(1-u_2) + \vartheta \ln(1-u_1) \ln(1-u_2))} \\ &= 1 - (1 - u_1) - (1 - u_2) + (1 - u_1)(1 - u_2)e^{-\vartheta \ln(1-u_1) \ln(1-u_2)} \\ &= u_1 + u_2 - 1 + (1 - u_1)(1 - u_2)e^{-\vartheta \ln(1-u_1) \ln(1-u_2)}. \end{aligned}$$

c) Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{\vartheta \rightarrow 0} C(u_1, u_2) &= \lim_{\vartheta \rightarrow 0} u_1 + u_2 - 1 + (1 - u_1)(1 - u_2)e^{-\vartheta \ln(1-u_1) \ln(1-u_2)} \\ &= u_1 + u_2 - 1 + (1 - u_1)(1 - u_2) \\ &= u_1 u_2 \\ &= \Pi(u_1, u_2)\end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 9.6).

Aufgabe 7

- a) Da U_1 und U_2 stochastisch unabhängig sowie $U[0, 1]$ -verteilt sind, folgt für $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \mathbb{P}\left(\left(\max\{U_1, U_2\}\right)^2 \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(\max\{U_1, U_2\}\right) \leq \sqrt{x}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(U_1 \leq \sqrt{x}, U_2 \leq \sqrt{x}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(U_1 \leq \sqrt{x}\right) \mathbb{P}\left(U_2 \leq \sqrt{x}\right) \\ &= \sqrt{x} \sqrt{x} = x \end{aligned}$$

D.h. es gilt $X_1 \sim U[0, 1]$.

Ferner erhält man für $x \in [0, 1]$

$$\mathbb{P}(1 - U_1 \leq x) = \mathbb{P}(U_1 \geq 1 - x) = 1 - \mathbb{P}(U_1 \leq 1 - x) = 1 - (1 - x) = x$$

und somit $1 - U_1 \sim U[0, 1]$. Zusammen mit dem ersten Teil folgt daraus $X_2 \sim U[0, 1]$.

- b) Da die Zufallsvariablen X_1 und X_2 gemäß Aufgabenteil a) $U[0, 1]$ -verteilt sind, handelt es sich bei der Verteilungsfunktion von $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ um eine Copula. Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit von U_1 und U_2 sowie $U_1, U_2 \in U[0, 1]$ erhält man für diese

$$\begin{aligned}
 F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\
 &= \mathbb{P}\left(\left(\max\{U_1, U_2\}\right)^2 \leq x_1, \left(\max\{1 - U_1, 1 - U_2\}\right)^2 \leq x_2\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\max\{U_1, U_2\} \leq \sqrt{x_1}, \max\{1 - U_1, 1 - U_2\} \leq \sqrt{x_2}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(U_1 \leq \sqrt{x_1}, U_2 \leq \sqrt{x_1}, 1 - U_1 \leq \sqrt{x_2}, 1 - U_2 \leq \sqrt{x_2}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(U_1 \leq \sqrt{x_1}, 1 - U_1 \leq \sqrt{x_2}\right) \mathbb{P}\left(U_2 \leq \sqrt{x_1}, 1 - U_2 \leq \sqrt{x_2}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(1 - \sqrt{x_2} \leq U_1 \leq \sqrt{x_1}\right) \mathbb{P}\left(1 - \sqrt{x_2} \leq U_2 \leq \sqrt{x_1}\right) \\
 &= \left(\sqrt{x_1} - (1 - \sqrt{x_2})\right)^2 \\
 &= \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - 1\right)^2
 \end{aligned}$$

für $x_1 \geq 1 - 2\sqrt{x_2} + x_2$ und $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = 0$ sonst.

Da die Verteilungsfunktionen von X_1 und X_2 stetig sind, ist die Copula von $(X_1, X_2)^T$ eindeutig und lautet

$$C(u_1, u_2) = (\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - 1)^2$$

für $u_1, u_2 \in [0, 1]$ (vgl. Abschnitt 9.4). Für die Dichte der Copula erhält man

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2) &= \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_2 \partial u_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} 2(\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - 1) \frac{1}{2\sqrt{u_1}} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} (\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} - 1) \frac{1}{\sqrt{u_1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u_1 u_2}} \end{aligned}$$

für $u_1, u_2 \in (0, 1]$ (vgl. Abschnitt 9.5).

Aufgabe 8

a) Man erhält

$$\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 0,00750 \quad \text{und} \quad \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = -0,00130$$

sowie

$$\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 0,0001762, \quad \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 0,0001587$$

und

$$\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0,00008351.$$

Damit folgt

$$r(X, Y) = \frac{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2}} = 0,4994.$$

b) Für die Ränge der x_i - und y_i -Werte gilt:

i	x_i (BMW)	y_i (Siemens)	r_{x_i}	r_{y_i}
1	0,0030	-0,0051	6	4
2	0,0224	0,0072	10	8
3	-0,0059	-0,0055	3	3
4	0,0206	0,0017	9	7
5	-0,0058	0,0160	4	9
6	-0,0118	-0,0013	2	5
7	0,0064	0,0219	8	10
8	0,0039	0,0016	7	6
9	-0,0015	-0,0156	5	2
10	-0,0238	-0,0222	1	1

Ferner ist

$$\frac{1}{2}(n+1) = 5,5.$$

Damit erhält man (vgl. Abschnitt 9.10):

$$\begin{aligned}r_S(X, Y) &= \frac{12}{10(10^2 - 1)} \sum_{i=1}^{10} (r_{x_i} - 5,5) (r_{y_i} - 5,5) \\&= \frac{2}{165} \left(0,5 \cdot (-1,5) + 4,5 \cdot 2,5 + (-2,5) \cdot (-2,5) + 3,5 \cdot 1,5 + (-1,5) \cdot 3,5 \right. \\&\quad \left. + (-3,5) \cdot (-0,5) + 2,5 \cdot 4,5 + 1,5 \cdot 0,5 + (-0,5) \cdot (-3,5) + (-4,5) \cdot (-4,5) \right) \\&= 0,6363636\end{aligned}$$

- c) Werden die zehn Beobachtungen (x_i, y_i) nun anhand der x_i -Werte aufsteigend angeordnet, erhält man:

x_i (BMW)	y_i (Siemens)	r_{x_i}	r_{y_i}	q_i
-0,0238	-0,0222	1	1	0
-0,0118	-0,0013	2	5	3
-0,0059	-0,0055	3	3	1
-0,0058	0,0160	4	9	5
-0,0015	-0,0156	5	2	0
0,0030	-0,0051	6	4	0
0,0039	0,0016	7	6	0
0,0064	0,0219	8	10	2
0,0206	0,0017	9	7	0
0,0224	0,0072	10	8	0

Zum Beispiel gilt $q_1 = 0$, da es keine Ränge gibt, die kleiner als $r_{y_i} = 1$ sind. Weiter gilt $q_2 = 3$, da $r_{y_i} = 5$ ist und von den vier kleineren Rängen 1, 2, 3 und 4 nur die drei Ränge 3, 2 und 4 in der Reihenfolge nach $r_{y_i} = 5$ kommen usw. Es gilt somit (vgl. Abschnitt 9.10)

$$r_{\tau}(X, Y) = 1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n q_i = 1 - \frac{4}{10(10-1)} \cdot 11 = 0,5111111.$$

Aufgabe 9

a) $C_{-1}^{Cl}(u_1, u_2) = W(u_1, u_2)$: Einsetzen von $\theta = -1$ in

$$C_{\theta}^{Cl}(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}$$

(vgl. Abschnitt 9.8) liefert unmittelbar

$$C_{\theta}^{Cl}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\} = W(u_1, u_2)$$

und damit die Behauptung (vgl. Abschnitt 9.6).

$\lim_{\theta \rightarrow 0} C_{\theta}^{Cl}(u, v) = \Pi(u, v)$: Mit der Regel von L'Hôpital erhält man (vgl. Abschnitt 9.6):

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} C_{\theta}^{Cl}(u, v) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta} \\&= \lim_{\theta \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{\theta} \ln(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)} \\&= e^{-\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\ln(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)}{\theta}} \\&= e^{-\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{u^{-\theta}(-\ln(u)) + v^{-\theta}(-\ln(v))}{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1}} \\&= e^{\ln(u) + \ln(v)} = uv = \Pi(u, v)\end{aligned}$$

$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}^{Cl}(u, v) = M(u, v)$: OBdA gelte $u \leq v$. Dann erhält man (vgl. Abschnitt 9.6):

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}^{Cl}(u, v) &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left(u^{-\theta} \left(1 + \left(\frac{u}{v} \right)^{\theta} - u^{\theta} \right) \right)^{-1/\theta} \\ &= u \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{u}{v} \right)^{\theta} - u^{\theta} \right)^{-1/\theta} \\ &= u \cdot 1 = \min \{u, v\} = M(u, v)\end{aligned}$$

Für $u \geq v$ erhält man völlig analog:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}^{Cl}(u, v) = \dots = v \cdot 1 = \min \{u, v\} = M(u, v)$$

- b) Für den unteren Tailabhängigkeitskoeffizienten folgt für $\theta \in (0, \infty)$ (vgl. Abschnitt 9.11):

$$\begin{aligned}\lambda_l(X, Y) &= \lim_{q \downarrow 0} \frac{C_\theta^{Cl}(q, q)}{q} \\ &= \lim_{q \downarrow 0} \frac{(q^{-\theta} + q^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{q} \\ &= \lim_{q \downarrow 0} \frac{\left(q^{-\theta} \left(1 + 1 - \frac{1}{q^{-\theta}}\right)\right)^{-1/\theta}}{q} \\ &= \lim_{q \downarrow 0} \left(1 + 1 - q^\theta\right)^{-1/\theta} = 2^{-1/\theta}\end{aligned}$$

Für den oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten erhält man mit der Regel von L'Hôpital (vgl. Abschnitt 9.11):

$$\begin{aligned}\lambda_u(X, Y) &= \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - 2q + C_{\theta}^{Cl}(q, q)}{1 - q} \\&= \lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - 2q + (q^{-\theta} + q^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{1 - q} \\&= \lim_{q \uparrow 1} \frac{-2 - \frac{1}{\theta} (2q^{-\theta} - 1)^{-1/\theta - 1} (-2\theta q^{-\theta - 1})}{-1} \\&= 2 + \frac{1}{\theta} \lim_{q \uparrow 1} (2q^{-\theta} - 1)^{-1/\theta - 1} \left(-2\theta \lim_{q \uparrow 1} q^{-\theta - 1} \right) \\&= 2 + \frac{1}{\theta} (-2\theta) = 0\end{aligned}$$

Aufgabe 10

Die Zufallsvariable X besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. Abschnitt 4.7). Auflösen der Gleichung $u_1 = 1 - e^{-\lambda x}$ nach x liefert

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u_1)$$

und damit die Umkehrfunktion

$$F_X^{-1}(u_1) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u_1) & \text{für } u_1 \in [0, 1) \\ \infty & \text{für } u_1 = 1 \end{cases}.$$

Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Y ist für $y > 0$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X^2 \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left(-e^{-\lambda x} \right) \Big|_0^{\sqrt{y}} = 1 - e^{-\lambda \sqrt{y}} \end{aligned}$$

Die Zufallsvariable Y besitzt somit die Verteilungsfunktion

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}} & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Auflösen der Gleichung $u_2 = 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}}$ nach y liefert

$$y = \frac{1}{\lambda^2} \ln^2(1 - u_2)$$

und somit die Umkehrfunktion

$$F_2^{-1}(u_2) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} \ln^2(1 - u_2) & \text{für } u_2 \in [0, 1) \\ \infty & \text{für } u_2 = 1 \end{cases}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\lambda_l(X, Y) &= \lim_{q \downarrow 0} \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(q) \mid X \leq F_X^{-1}(q)) \\ &= \lim_{q \downarrow 0} \mathbb{P}(X^2 \leq F_Y^{-1}(q) \mid X \leq F_X^{-1}(q)) \\ &= \lim_{q \downarrow 0} \mathbb{P}\left(X^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} \ln^2(1-q) \mid X \leq -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u_1)\right) = 1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lambda_u(X, Y) &= \lim_{q \uparrow 1} \mathbb{P}(Y > F_Y^{-1}(q) \mid X > F_X^{-1}(q)) \\ &= \lim_{q \uparrow 1} \mathbb{P}(X^2 > F_Y^{-1}(q) \mid X > F_X^{-1}(q)) \\ &= \lim_{q \uparrow 1} \mathbb{P}\left(X^2 > \frac{1}{\lambda^2} \ln^2(1-q) \mid X > -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u_1)\right) = 1\end{aligned}$$

(vgl. Abschnitt 9.11). D.h. es besteht eine extreme obere und untere Tailabhängigkeit in der Höhe von 1.

Aufgabe 11

- a) Werden die zehn Beobachtungen (x_i, y_i) anhand der x_i -Werte aufsteigend angeordnet, erhält man:

x_i (Schadenhöhe)	y_i (ALAE)	rank(x_i)	rank(y_i)	q_i
1500	301	1	3	2
2500	415	2	6	4
4500	395	3	4	2
5750	34474	4	12	8
7100	10593	5	10	6
9000	406	6	5	2
11750	2530	7	8	3
14000	175	8	1	0
15000	2072	9	7	1
19833	212	10	2	0
33033	7845	11	9	0
62500	12251	12	11	0

Zum Beispiel gilt $q_1 = 2$, da $\text{rank}(y_1) = 3$ ist und von den beiden kleineren Rängen 1 und 2 beide in der Reihenfolge nach $\text{rank}(y_1)$ kommen usw. Mit $n = 12$ folgt somit:

$$r_{\tau}(X, Y) = 1 - \frac{4}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n q_i = 1 - \frac{4}{12(12-1)} \cdot 28 = 0,1515$$

- b) Zwischen der Rangkorrelation $\rho_\tau(X, Y)$ (Kendalls τ) und dem Parameter θ der (bivariaten) Gumbel-Copula $C_\theta(u_1, u_2)$ besteht der folgende funktionale Zusammenhang

$$\rho_\tau(X, Y) = 1 - \frac{1}{\theta} \quad \text{für } \theta \in [1, \infty).$$

Zusammen mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a) liefert dies für θ die Schätzung

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1 - r_\tau(X, Y)} = \frac{1}{1 - 0,1515} = 1,17855.$$

D.h. die an die Daten angepasste Gumbel-Copula lautet:

$$C_{1,17855}^{Gu}(u_1, u_2) = \exp\left(-((- \ln(u_1))^{1,17855} + (- \ln(u_2))^{1,17855})^{1/1,17855}\right)$$

Die durch diese Copula repräsentierte Abhängigkeitsstruktur ist wegen $\Pi(u_1, u_2) = C_1^{Gu}(u_1, u_2)$ nicht sehr ausgeprägt.

Aufgabe 12

a) Für die Erwartungswerte von X und Y gilt

$$\mathbb{E}[X] = 2\Gamma(3) = 4 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[Y] = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

(vgl. Abschnitte 4.7 und 4.11). Bezeichnen F_X und F_Y die Verteilungsfunktionen von X und Y , dann gilt

$$F_X(4) = 0,7569 \quad \text{und} \quad F_Y(6) = 0,5768$$

(vgl. Abschnitte 4.7 und 4.11). Zusammen mit dem Satz von Sklar folgt daraus:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}[X], Y \leq \mathbb{E}[Y]) &= \mathbb{P}(X \leq 4, Y \leq 6) \\ &= C_{10}^{Cl}(F_X(4), F_Y(6)) \\ &= C_{10}^{Cl}(0,7569; 0,5768) \\ &= \left(0,7569^{-\theta} + 0,5768^{-10} - 1\right)^{-1/10} \\ &\approx 0,5734 \end{aligned}$$

b) Für die Dichte von $C_{\theta}^{Cl}(u, v)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 c_{\theta}^{Cl}(u, v) &= \frac{\partial^2 C_{\theta}^{Cl}(u, v)}{\partial u \partial v} \\
 &= \frac{\partial}{\partial v} \left(-\frac{1}{\theta} \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta-1} (-\theta) u^{-\theta-1} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{u^{1+\theta}} \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta-1} \right) \\
 &= -\frac{1/\theta + 1}{u^{1+\theta}} \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta-2} (-\theta) v^{-\theta-1} \\
 &= \frac{1 + \theta}{(uv)^{1+\theta}} \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1 \right)^{-2-\frac{1}{\theta}}
 \end{aligned}$$

- c) Bevor eine ML-Schätzung für den Parameter θ berechnet werden kann, müssen mit Hilfe der Daten $(x_1, y_1), \dots, (x_8, y_8)$ Pseudo-Daten für die Copula C_θ

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{u}}_i &:= (\widehat{u}_{i1}, \widehat{u}_{i2})^T := (\widehat{F}_X(x_i), \widehat{F}_Y(y_i))^T \\ &= (1 - e^{\widehat{\lambda}_1 x_i}, 1 - e^{\widehat{\lambda}_2 y_i})^T \quad \text{für } i = 1, \dots, 8\end{aligned} \quad (8)$$

erzeugt werden. Der ML-Schätzer für den Parameter λ einer $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung lautet

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}.$$

Damit erhält man für die beiden Parameter λ_1 und λ_2 die folgenden ML-Schätzungen:

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i} = \frac{10}{29} \quad \text{bzw.} \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{1}{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i} = \frac{20}{93}.$$

In (8) eingesetzt liefert dies für die Copula C_θ die folgenden Pseudo-Beobachtungen

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\widehat{u}_{i1}$	0,5777	0,5920	0,3613	0,6059	0,3829	0,6321	0,7881	0,8392
$\widehat{u}_{i2}$	0,5289	0,5947	0,3354	0,6438	0,4283	0,7000	0,7683	0,8131

Durch Maximierung der Log-Likelihoodfunktion

$$\begin{aligned}
 \ln(L(\theta; \hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_8)) &= \ln \left(\prod_{i=1}^8 c_{\theta}(\hat{\mathbf{u}}_i) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^8 \ln(c_{\theta}(\hat{\mathbf{u}}_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^8 \left(\ln(1 + \theta) - (1 + \theta) \ln(\hat{u}_{i1} \hat{u}_{i2}) \right. \\
 &\quad \left. + \left(-2 - \frac{1}{\theta}\right) \ln(\hat{u}_{i1}^{-\theta} + \hat{u}_{i2}^{-\theta} - 1) \right)
 \end{aligned}$$

erhält man für θ die Schätzung $\hat{\theta} = 22,238$. D.h. die an die Daten angepasste Clayton-Copula lautet

$$C_{22,238}^{Cl}(u_1, u_2) = \left(u_1^{-22,238} + u_2^{-22,238} - 1 \right)^{-1/22,238}.$$

Zusammen mit dem Satz von Sklar folgt daraus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 3, Y \leq 4) &= C_{22,238}^{Cl}(\hat{F}_X(3), \hat{F}_Y(4)) \\ &= C_{22,238}^{Cl}(0,6446; 0,5769) \\ &= \left(0,6446^{-22,238} + 0,5769^{-22,238} - 1\right)^{-1/22,238} \approx 0,5748.\end{aligned}$$

R-Code:

```
1  ###
2  # Maximierung Log-Likelihoodfunktion für bivariate Clayton-Copula (IFM-Methode)
3  ##
4
5  # Beobachtungen
6  X<-c(2.5,2.6,1.3,2.7,1.4,2.9,4.5,5.3)
7  Y<-c(3.5,4.2,1.9,4.8,2.6,5.6,6.8,7.8)
8
9  # ML-Schätzung der Parameter der beiden Randverteilungen
10 lambda.1<-1/mean(X)
11 lambda.2<-1/mean(Y)
12
13 # Pseudo-Beobachtungen
14 U<-1-exp(-lambda.1*X)
15 V<-1-exp(-lambda.2*Y)
16
17 # Minimierung der negativen Log-Likelihoodfunktion
18 f<-function(theta){
19   -sum(log(1+theta)-(1+theta)*log(x*y)
20       +(-2-1/theta)*log(x^(-theta)+y^(-theta)-1))
21 }
22 theta<-nlm(f,p=10)
23 theta
```

Lösungen zu Kapitel 10

Aufgabe 1

- a) Mit dem Keim $x_0 = 3$ resultieren die folgenden fünf Pseudozufallszahlen:

$$x_1 = (27 \cdot 3 + 31) \bmod 512 = 112$$

$$x_2 = (27 \cdot 112 + 31) \bmod 512 = 495$$

$$x_3 = (27 \cdot 495 + 31) \bmod 512 = 84$$

$$x_4 = (27 \cdot 84 + 31) \bmod 512 = 171$$

$$x_5 = (27 \cdot 171 + 31) \bmod 512 = 40$$

Für die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1)$ erhält man damit die fünf Pseudozufallszahlen:

$$u_1 = \frac{112}{512} = 0,2187500$$

$$u_2 = \frac{495}{512} = 0,9667969$$

$$u_3 = \frac{84}{512} = 0,1640625$$

$$u_4 = \frac{171}{512} = 0,3339844$$

$$u_5 = \frac{40}{512} = 0,0781250$$

- b) Mit den Pseudozufallszahlen aus Aufgabenteil a) und der Transformation $\tilde{u} = 5u + 2$ erhält man für die Gleichverteilung auf dem Intervall $[2, 7)$ die fünf Pseudozufallszahlen:

$$\tilde{u}_1 = 5u_1 + 2 = 5 \cdot 0,2187500 + 2 = 3,093750$$

$$\tilde{u}_2 = 5u_2 + 2 = 5 \cdot 0,9667969 + 2 = 6,833984$$

$$\tilde{u}_3 = 5u_3 + 2 = 5 \cdot 0,1640625 + 2 = 2,820312$$

$$\tilde{u}_4 = 5u_4 + 2 = 5 \cdot 0,3339844 + 2 = 3,669922$$

$$\tilde{u}_5 = 5u_5 + 2 = 5 \cdot 0,0781250 + 2 = 2,390625$$

Aufgabe 2

Mit der Inversionsmethode erhält man, dass die diskrete Zufallsvariable

$$N := \begin{cases} 1 & \text{für } U < 0,9 \\ 2 & \text{für } 0,9 \leq U < 0,99 \\ 3 & \text{für } 0,99 \leq U < 0,999 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

die Verteilungsfunktion F_N besitzt. Ferner erhält man mit der Inversionsmethode, dass die Zufallsvariablen

$$X_i := -100 \ln(1 - V_i)$$

die Verteilungsfunktion F_X besitzen.

Die Realisierung $u = 0,05$ von U führt somit für die Verteilungsfunktion F_N zur Pseudozufallszahl $N = 1$, und die Realisierung $v_1 = 0,3$ von V_1 liefert für die Verteilungsfunktion F_X die Pseudozufallszahl $X_1 = -100 \ln(1 - 0,3) \approx 35,6675$. Für die Verteilungsfunktion F_S der Gesamtschadenhöhe liefert dies die Pseudozufallszahl

$$S = \sum_{i=1}^N X_i = X_1 = 35,6675.$$

Aufgabe 3

Mit der Inversionsmethode erhält man, dass die Zufallsvariable

$$N := \begin{cases} 0 & \text{für } U < 0,125 \\ 1 & \text{für } 0,125 \leq U < 0,312 \\ 2 & \text{für } 0,312 \leq U < 0,500 \\ 3 & \text{für } 0,500 \leq U < 0,656 \\ 4 & \text{für } 0,656 \leq U < 0,773 \\ 5 & \text{für } 0,773 \leq U < 0,855 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \end{cases}$$

die Verteilungsfunktion F_N besitzt. Die Einzelschadenshöhen $X_1, X_2, \dots$ sind Weibull(2, 200)-verteilt. Da jedoch pro Schaden der gedeckte Höchstschaden $l = 650$ beträgt und ein Selbstbehalt von $d = 150$ existiert, sind die Schadenhöhen

$$Y_i := \begin{cases} 0 & \text{für } X_i \leq 150 \\ X_i - 150 & \text{für } 150 < X_i < 650 \\ 500 & \text{für } X_i \geq 650 \end{cases}$$

zu betrachten.

Ferner gilt:

$$\mathbb{P}(Y_i = 0) = \mathbb{P}(X_i \leq 150) = F_X(150) = 1 - e^{-(150/200)^2} \approx 0,43021720$$

$$\mathbb{P}(Y_i = 500) = \mathbb{P}(X_i \geq 650) = 1 - F_X(650) = e^{-(650/200)^2} \approx 0,00002587$$

Die Schadenhöhen Y_i besitzen somit die Verteilungsfunktion

$$F_Y(y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0 \\ 0,43021720 & \text{für } y = 0 \\ 1 - e^{-((y+150)/200)^2} & \text{für } 0 < y < 500 \\ 1 & \text{für } y \geq 500 \end{cases}$$

Folglich besitzt

$$Y := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq V_i \leq 0,43021720 \\ 200\sqrt{-\ln(1 - V_i)} - 150 & \text{für } 0,43021720 < V_i < 0,99997410 \\ 500 & \text{für } 0,99997410 \leq V_i \leq 1 \end{cases}$$

für $V_i \sim U(0, 1)$ gemäß der Inversionsmethode die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$.

Die Realisierung $u = 0,7654$ liefert somit für die Verteilungsfunktion F_N die Pseudozufallszahl $N = 4$ und die vier Realisierungen $v_1 = 0,2738$, $v_2 = 0,5152$, $v_3 = 0,7537$ und $v_4 = 0,6481$ führen für die Verteilungsfunktion F_Y zu den folgenden vier Pseudozufallszahlen:

$$Y_1 = 0$$

$$Y_2 = 200\sqrt{-\ln(1 - 0,5152)} - 150 \approx 20,1786$$

$$Y_3 = 200\sqrt{-\ln(1 - 0,7537)} - 150 \approx 86,7450$$

$$Y_4 = 200\sqrt{-\ln(1 - 0,6481)} - 150 \approx 54,3926$$

Für die Verteilungsfunktion $F_{\tilde{S}}$ der Gesamtschadenhöhe $\tilde{S}$ liefert dies die Pseudozufallszahl

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \sum_{i=1}^N Y_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \\ &= 0 + 20,1786 + 86,7450 + 54,3926 = 161,3162.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{für } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt die erste Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 12x(2-3x) & \text{für } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Folglich ist $f'(x)$ auf $(0, \frac{2}{3})$ streng monoton wachsend und auf $(\frac{2}{3}, 1)$ monoton fallend. Das Maximum von $f(x)$ liegt daher an der Stelle $x = \frac{2}{3}$ und beträgt

$$f(2/3) = -12 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 12 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{96}{27} + \frac{48}{9} = \frac{48}{27} = \frac{16}{9} =: M.$$

Es gilt daher

$$f(x) \leq Mg(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Da es sich bei $g(x)$ ferner um die Dichte der Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$ handelt, erhält man mit der Verwerfungsmethode den folgenden Algorithmus zur Erzeugung von F -verteilten Pseudozufallszahlen:

- 1) Erzeuge unabhängig voneinander $Y, U \sim U(0, 1)$.
- 2) Liefere $X := Y$, falls

$$U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)} = \frac{9f(Y)}{16}$$

gilt. Andernfalls gehe zurück zu Schritt 1).

- b) Zur Erzeugung einer Pseudozufallszahl für die Verteilungsfunktion F werden im Mittel $M = \frac{16}{9} \approx 1,78$ Simulationen benötigt. D.h. die Effizienz des Algorithmus beträgt $\frac{1}{M} = \frac{9}{16} = 0,5625$.

Aufgabe 5

a) Auflösen der Gleichung

$$u = F_X(x) = \left(\frac{x}{x + \lambda} \right)^\alpha \quad \text{für } x > 0$$

nach x liefert

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[\alpha]{u}(x + \lambda) \\ \iff x &= \frac{\sqrt[\alpha]{u}\lambda}{1 - \sqrt[\alpha]{u}}. \end{aligned}$$

D.h. die Quantilfunktion lautet

$$x = F_X^{-1}(u) = \frac{\sqrt[\alpha]{u}\lambda}{1 - \sqrt[\alpha]{u}} \quad \text{für } u \in (0, 1).$$

Speziell für $\alpha = \lambda = 4$ erhält man somit, dass die Zufallsvariable

$$X = F_X^{-1}(U) = \frac{4\sqrt[4]{U}}{1 - \sqrt[4]{U}} \quad (9)$$

mit $U \sim U(0, 1)$ invers Pareto-verteilt ist mit den Parametern $\alpha = 4$ und $\lambda = 4$.

b) Für $\alpha = \lambda = 4$ gilt

$$\mathbb{E}[X^{-1}] = \frac{1}{12} \approx 0,08333 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[X^{-2}] = \frac{1}{96} \approx 0,01042.$$

Ferner gilt

$$\mathbb{E}[X^{-1}] = \mathbb{E}[g^a(X)] \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[X^{-2}] = \mathbb{E}[g^b(X)]$$

mit

$$g^a(x) := \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g^b(x) := \frac{1}{x^2}.$$

Erzeuge nun $n = 50$ unabhängige Pseudozufallszahlen $U_1, \dots, U_{50} \sim U(0, 1)$. Eingesetzt in (9) liefert dies die Pseudozufallszahlen $X_1, \dots, X_{50} \sim F_X$. Damit erhält man für $\mathbb{E}[X^{-1}]$ und $\mathbb{E}[X^{-2}]$ die (naiven) Monte-Carlo-Schätzungen

$$\hat{g}_{50}^a(X) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} g^a(X_i) \approx 0,08065 \quad \text{bzw.} \quad \hat{g}_{50}^b(X) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} g^b(X_i) \approx 0,01504.$$

- c) Für $\text{Var}(g^a(X))$ resultiert die Monte-Carlo-Schätzung

$$\widehat{\text{Var}}(g^a(X)) = \frac{1}{50-1} \sum_{i=1}^{50} (g^a(X_i) - \widehat{g}_{50}^a(X))^2 = 0,00870973.$$

Für die Varianz und die Standardabweichung von $\widehat{g}_{50}^a(X)$ liefert dies die Schätzungen

$$\widehat{\text{Var}}(\widehat{g}_{50}^a(X)) = \frac{\widehat{\text{Var}}(g^a(X))}{50} = 0,00017419$$

bzw.

$$\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\widehat{g}_{50}^a(X))} = 0,01320.$$

Für das 95%-Konfidenzintervall von $\mathbb{E}[X^{-1}]$ erhält man damit die Monte-Carlo-Schätzung:

$$[0,08065 - 1,96 \cdot 0,01320, 0,08065 + 1,96 \cdot 0,01320] = [0,054778, 0,106522]$$

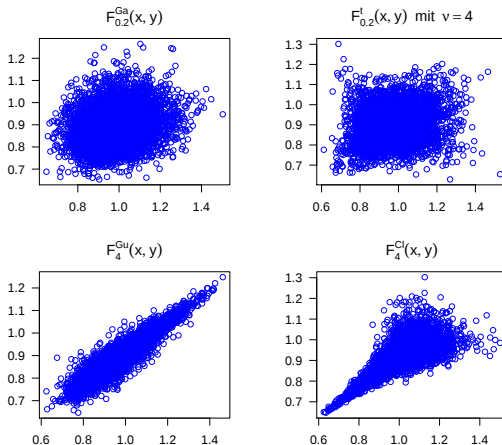
Es enthält den tatsächlichen Erwartungswert $\mathbb{E}[X^{-1}] = \frac{1}{12} \approx 0,08333$.

Aufgabe 6

Vorgehen:

- 1) Erzeuge für die vier verschiedenen Copulas jeweils 5000 simulierte (zweidimensionale) unabhängige Beobachtungen

$$(X_i, Y_i) \sim F_{(X,Y)} \sim C(F_1(x), F_2(y)).$$



- 2) Berechne damit 5000 simulierte Beobachtungen S_i für die Gesamtschadenhöhe für das gesamte Versicherungsportfolio

$$S_i := X_i + Y_i \quad \text{für } i = 1, \dots, 5000.$$

- 3) Ermittle aus der empirischen Verteilung $\{S_1, \dots, S_{5000}\}$ für die Gesamtschadenhöhe S eine Schätzung $\widehat{\text{VaR}}_{0,95}(S)$ für den Value-at-Risk $\text{VaR}_{0,95}(S)$ der Gesamtschadenhöhe für das gesamte Versicherungsportfolio in Form des 95%-Stichprobenquantils.
- 4) Ermittle alle für das erste Teilportfolio simulierten Werte X_i , für die

$$X_i + Y_i > \widehat{\text{VaR}}_{0,95}(S)$$

gilt, und berechne anschließend als Monte-Carlo-Schätzung für das Risikokapital des ersten Teilportfolios $\text{RK}(X) = \mathbb{E}[X | S > \text{VaR}_{0,95}(S)]$ den Mittelwert

$$\frac{1}{|N|} \sum_{i \in N} X_i \quad \text{mit} \quad N := \left\{ i = 1, \dots, n : X_i + Y_i > \widehat{\text{VaR}}_{0,95}(S) \right\}.$$

Die Monte-Carlo-Schätzung für das Risikokapital des zweiten Teilportfolios $\text{RK}(Y) = \mathbb{E}[Y | S > \text{VaR}_{0,95}(S)]$ berechnet man analog.

- 5) Durch Addition der Monte-Carlo-Schätzungen für die Risikokapitalien der beiden Teilportfolios erhält man die Monte-Carlo-Schätzung für das Risikokapital des gesamten Versicherungsportfolios

$$\text{RK}(S) = \mathbb{E}[S | S > \text{VaR}_{0,95}(S)].$$

Dies liefert die folgenden Werte (in Millionen Euro):

	$C_{0,2}^{Ga}(u, v)$	$C_{4;0,2}^t(u, v)$	$C_4^{Gu}(u, v)$	$C_4^{Cl}(u, v)$
RK(X)	1,207823	1,208595	1,255856	1,223993
RK(Y)	1,022353	1,027655	1,089241	1,047408
RK(S)	2,230176	2,236250	2,345097	2,271401

R-Code:

```

1  ###
2  # Risikokapitalallokation mittels Monte-Carlo-Integration
3  ###
4
5  # Simulation von 5000 Beobachtungen für die 4 verschiedenen Copulas
6  library(copula)
7  set.seed(1234)
8  n<-5000
9  observations.Gauss<-mvdc(normalCopula(0.2), c("lnorm","lnorm"),
10                        list(list(meanlog=-0.0277, sdlog=sqrt(0.0149)),
11                             list(meanlog=-0.1099, sdlog=sqrt(0.0089))))
12  observations.Gauss.sim<-rmvdc(observations.Gauss,n)
13
14  observations.t<-mvdc(tCopula(0.2, df=4, dim = 2), c("lnorm","lnorm"),
15                    list(list(meanlog=-0.0277, sdlog=sqrt(0.0149)),
16                         list(meanlog=-0.1099, sdlog=sqrt(0.0089))))
17  observations.t.sim<-rmvdc(observations.t,n)
18
19  observations.Gumbel<-mvdc(gumbelCopula(param=4, dim = 2), c("lnorm","lnorm"),
20                          list(list(meanlog=-0.0277, sdlog=sqrt(0.0149)),
21                               list(meanlog=-0.1099, sdlog=sqrt(0.0089))))
22  observations.Gumbel.sim<-rmvdc(observations.Gumbel,n)
23
24  observations.Clayton<-mvdc(claytonCopula(param=4, dim = 2), c("lnorm","lnorm"),
25                           list(list(meanlog=-0.0277, sdlog=sqrt(0.0149)),
26                                list(meanlog=-0.1099, sdlog=sqrt(0.0089))))
27  observations.Clayton.sim<-rmvdc(observations.Clayton,n)
28
29  par(mfrow=c(2,2),mar=c(3,3,3,3),cex=1.3)
30  plot(observations.Gauss.sim, col=4,xlab=expression(X[i]),ylab=expression(Y[i]),
31       main=expression({F[0.2]}^{Ga}(x,y)), las=1)
32  plot(observations.t.sim, col=4,xlab=expression(X[i]),ylab=expression(Y[i]),
33       main={F[0.2]}^{t}(x,y)~mit~nu=4, las=1)
34  plot(observations.Gumbel.sim,col=4, xlab=expression(X[i]), ylab=expression(Y[i]),
35       main=expression({F[4]}^{Gu}(x,y)), las=1)
36  plot(observations.Clayton.sim,col=4,xlab=expression(X[i]),ylab=expression(Y[i]),
37       main=expression({F[4]}^{Cl}(x,y)), las=1)

```

R-Code (Fortsetzung):

```

38
39 # Risikokapital für das gesamte Portfolio und die beiden Teilportfolios
40 Risikokapital.Gauss<-observations.Gauss.sim[,1]+observations.Gauss.sim[,2]
41 VaR.Gauss<-quantile(Risikokapital.Gauss, 0.95, type=1, name=FALSE)
42 RK.Gauss.1<-mean(observations.Gauss.sim[Risikokapital.Gauss>VaR.Gauss,1])
43 RK.Gauss.2<-mean(observations.Gauss.sim[Risikokapital.Gauss>VaR.Gauss,2])
44 c(RK.Gauss.1,RK.Gauss.2,RK.Gauss.1+RK.Gauss.2)
45
46 Risikokapital.t<-observations.t.sim[,1]+observations.t.sim[,2]
47 VaR.t<-quantile(Risikokapital.t, 0.95, type=1, name=FALSE)
48 RK.t.1<-mean(observations.t.sim[Risikokapital.t>VaR.t,1])
49 RK.t.2<-mean(observations.t.sim[Risikokapital.t>VaR.t,2])
50 c(RK.t.1,RK.t.2,RK.t.1+RK.t.2)
51
52 Risikokapital.Gumbel<-observations.Gumbel.sim[,1]+observations.Gumbel.sim[,2]
53 VaR.Gumbel<-quantile(Risikokapital.Gumbel, 0.95, type=1, name=FALSE)
54 CTE.Gumbel<-mean(Risikokapital.Gumbel[Risikokapital.Gumbel>VaR.t])
55 RK.Gumbel.1<-mean(observations.Gumbel.sim[Risikokapital.Gumbel>VaR.Gumbel,1])
56 RK.Gumbel.2<-mean(observations.Gumbel.sim[Risikokapital.Gumbel>VaR.Gumbel,2])
57 c(RK.Gumbel.1,RK.Gumbel.2,RK.Gumbel.1+RK.Gumbel.2)
58
59 Risikokapital.Clayton<-observations.Clayton.sim[,1]+observations.Clayton.sim[,2]
60 VaR.Clayton<-quantile(Risikokapital.Clayton, 0.95, type=1, name=FALSE)
61 CTE.Clayton<-mean(Risikokapital.Clayton[Risikokapital.Clayton>VaR.t])
62 RK.Clayton.1<-mean(observations.Clayton.sim[Risikokapital.Clayton>VaR.Clayton,1])
63 RK.Clayton.2<-mean(observations.Clayton.sim[Risikokapital.Clayton>VaR.Clayton,2])
64 c(RK.Clayton.1,RK.Clayton.2,RK.Clayton.1+RK.Clayton.2)

```

Aufgabe 7

a) Es gilt:

$$\mathbb{E}[U] = \int_0^1 u \, du = \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[U^2] = \int_0^1 u^2 \, du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}[U^3] = \int_0^1 u^3 \, du = \frac{1}{4} u^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{E}[U^4] = \int_0^1 u^4 \, du = \frac{1}{5} u^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \text{Var}(U^2) \\ &= \mathbb{E}[U^4] - \mathbb{E}[U^2]^2 \\ &= \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{9-5}{45} = \frac{4}{45}\end{aligned}$$

Wegen $1 - U \sim U(0, 1)$ gilt ferner:

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X) = \frac{4}{45}$$

Ferner erhält man

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X, Y) &= \operatorname{Cov}(U^2, 1 - 2U + U^2) \\&= -2\operatorname{Cov}(U^2, U) + \operatorname{Var}(U^2) \\&= -2(\mathbb{E}[U^3] - \mathbb{E}[U^2]\mathbb{E}[U]) + \frac{4}{45} \\&= -2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{45} = \frac{-45 + 30 + 8}{90} = -\frac{7}{90}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right) &= \frac{1}{4}\operatorname{Var}(X+Y) \\&= \frac{1}{4}(\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y)) \\&= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{45} + \frac{4}{45} - \frac{7}{90} \cdot 2\right) = \frac{1}{180}.\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\int_0^1 u^2 du = \int_0^1 u^2 \cdot 1 du = \mathbb{E}[g(U)] \quad (10)$$

mit $g(u) := u^2$ und $U \sim U(0, 1)$. Unter Verwendung von 100 Pseudozufallszahlen $U_1, \dots, U_{100} \sim U(0, 1)$ erhält man für $\mathbb{E}[g(U)] = \mathbb{E}[U^2] = \frac{1}{3}$ und $\text{Var}(g(U)) = \text{Var}(U^2) = \frac{4}{45} \approx 0,08889$ die (naiven) Monte-Carlo-Schätzungen

$$\hat{g}_{100}(U) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} g(U_i) \approx 0,26830$$

und

$$\widehat{\text{Var}}(g(U)) = \frac{1}{100-1} \sum_{i=1}^{100} (g(U_i) - \hat{g}_{100}(U))^2 \approx 0,074193.$$

Dies liefert für die Varianz von $\hat{g}_{100}(U)$ die Schätzung

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{100}(U)) = \frac{\widehat{\text{Var}}(g(U))}{100} \approx 0,00074193.$$

- c) Gegeben seien wieder 100 unabhängige Pseudozufallszahlen $U_1, \dots, U_{100} \sim U(0, 1)$. Setze

$$U_{100+i} := 1 - U_i \quad \text{für } i = 1, \dots, 100.$$

Dann sind die Pseudozufallszahlen U_i^2 und $(1 - U_{100+i})^2$ für $i = 1, \dots, 100$ gleichverteilt und paarweise negativ korreliert (vgl. Aufgabenteil a)). Mit diesen insgesamt 200 Pseudozufallszahlen erhält man für die Momente $\mathbb{E}[g(U)] = \frac{1}{3}$ und $\text{Var}(g(U)) = \frac{4}{45} \approx 0,08889$ die Monte-Carlo-Schätzungen

$$\hat{g}_{200}(U) = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} g(U_i) \approx 0,33081$$

und

$$\widehat{\text{Var}}(g(U)) = \frac{1}{200-1} \sum_{i=1}^{200} (g(U_i) - \hat{g}_{200}(U))^2 \approx 0,086136.$$

Dies liefert für die Varianz von $\hat{g}_{200}(U)$ die Schätzung

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{200}(U)) = \frac{\widehat{\text{Var}}(g(U))}{200} \approx 0,00043068.$$

Aufgabe 8

a) Es gilt

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e - 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e - 1} \cdot 1 dx = \mathbb{E}[g(X)] \quad (11)$$

mit $g(x) := \frac{e^x - 1}{e - 1}$ und $X \sim U(0, 1)$. Unter Verwendung von 100 Pseudozufallszahlen $X_1, \dots, X_{100} \sim U(0, 1)$ erhält man für

$$\mathbb{E}[g(X)] = \frac{e - 2}{e - 1} \approx 0,418023$$

die (naive) Monte-Carlo-Schätzung

$$\hat{g}_{100}(X) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} g(X_i) \approx 0,35531.$$

Für die Varianz von $\hat{g}_{100}(X)$ resultiert die Schätzung

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{100}(X)) &= \frac{\widehat{\text{Var}}(g(X))}{100} \\ &= \frac{1}{100(100 - 1)} \sum_{i=1}^{100} (g(X_i) - \hat{g}_{100}(X))^2 \approx 0,00072028. \end{aligned}$$

- b) Gegeben seien wieder 100 unabhängige Pseudozufallszahlen $X_1, \dots, X_{100} \sim U(0, 1)$. Setze

$$X_{100+i} := 1 - X_i \quad \text{für } i = 1, \dots, 100.$$

Dann sind die Pseudozufallszahlen

$$g(X_i) = \frac{e^{X_i} - 1}{e - 1} \quad \text{und} \quad g(1 - X_{100+i}) = \frac{e^{1 - X_{100+i}} - 1}{e - 1} \quad \text{für } i = 1, \dots, 100$$

gleichverteilt und aufgrund der strengen Monotonie von $g(x)$ paarweise negativ korreliert. Mit diesen insgesamt 200 Pseudozufallszahlen erhält man für $\mathbb{E}[g(X)]$ die Monte-Carlo-Schätzung

$$\hat{g}_{200}(X) = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} g(X_i) \approx 0,41677.$$

Für die Varianz von $\hat{g}_{200}(X)$ resultiert die Schätzung

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{200}(X)) = \frac{1}{200(200-1)} \sum_{i=1}^{200} (g(X_i) - \hat{g}_{200}(X))^2 \approx 0,00039775.$$

c) Für $X \sim U(0, 1)$ gilt

$$\mathbb{E}[h(X)] = \frac{1}{e-1} \mathbb{E}[X] = \frac{1}{2(e-1)}.$$

Dies führt zum Monte-Carlo-Schätzer

$$\hat{g}_{100}^K(X) = \frac{1}{2(e-1)} + \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (g(X_i) - h(X_i)).$$

Für $\mathbb{E}[g(X)]$ erhält man damit die Monte-Carlo-Schätzung

$$\hat{g}_{100}^K(X) = \frac{1}{2(e-1)} + 0,1006929 \approx 0,39168$$

und für die Varianz von $\hat{g}_{100}^K(X)$ resultiert die Schätzung

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{100}^K(X)) = \frac{1}{100(100-1)} \sum_{i=1}^{100} (g(X_i) - \hat{g}_{100}^K(X))^2 \approx 0,00011928.$$

d) Es gilt

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{100}^K(X)) < \widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{200}(X)) < \widehat{\text{Var}}(\hat{g}_{100}(X)).$$

D.h. die Monte-Carlo-Integration mit Kontrollvariablen ist am effizientesten