Quantitatives Risikomanagement 2
SS 2026

Univ.-Prof. Dr. Michael Merz
Universität Hamburg
Lehrstuhl für BWL, insb. Mathematik und Statistik in den Wirtschaftswissenschaften

Übungsaufgaben

Übungsaufgaben zu Kapitel 7

Übungsaufgaben

1) Die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien unabhängig und identisch-verteilt mit der Verteilungsfunktion F_X. Bestimmen Sie die asymptotische Grenzverteilung des standardisierten Maximums M_n für $n \to \infty$, falls gilt:

   a) $X \sim \mathrm{Par}(\alpha, \lambda)$, d.h.

   $$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   Hinweis: Verwenden Sie die Standardisierungskonstanten $a_n = \lambda n^{1/\alpha} - \lambda$ und $b_n = \frac{\lambda}{\alpha} n^{1/\alpha}$ für $n \in \mathbb{N}$.

   b) $X \sim \mathrm{U}(0,1)$, d.h.

   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}.$$

   Hinweis: Verwenden Sie die Standardisierungskonstanten $a_n = 1$ und $b_n = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

2) Die monatlichen Maximalschäden $M_{\text{Monat},1},\ldots,M_{\text{Monat},12}$ eines Risikos seien stochastisch unabhängig und identisch Fréchet-verteilt mit den Parametern ξ_M, μ_M und σ_M. Zeigen Sie, dass der jährliche Maximalschaden M_{Jahr} ebenfalls Fréchet-verteilt ist mit den Parametern

$$\xi_J = \xi_M, \quad \mu_J = \mu_M - \frac{\sigma_M - \sigma_J}{\xi_M} \quad \text{und} \quad \sigma_J = 12^{\xi_M}\sigma_M.$$

3) Die Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$ seien stochastisch unabhängig und identisch $\text{Exp}(1)$-verteilt. Ferner sei $M_n = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(M_n \leq 5)$ für $n = 10$ und $n = 100$ exakt sowie approximativ mit Hilfe der Grenzverteilung von M_n.

Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung der Grenzverteilung die Standardisierungskonstanten $a_n = \ln(n)$ und $b_n = 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

4) Weisen Sie nach für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gilt: Aus

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \approx F_\xi(x;\mu,\sigma) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

folgt

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) \approx F_\xi(x;\widetilde{\mu},\widetilde{\sigma}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

mit $\widetilde{\mu} = b_n\mu + a_n$ und $\widetilde{\sigma} = b_n\sigma$.

Übungsaufgaben

5) Bestimmen Sie geeignete Standardisierungskonstanten a_n und b_n für $n \in \mathbb{N}$ zur Bestimmung der Grenzverteilung des Maximums $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ von stochastisch unabhängigen und identisch $\text{Par}(\alpha, \lambda)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$.

   Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung der Standardisierungskonstanten den letzten Satz in Abschnitt 7.4.

6) Im `R`-Paket `evir` ist der Datensatz `spto87` enthalten. Er enthält die täglichen logarithmierten Renditen (daily log returns) $\ln(R_i/R_{i+1})$ des S&P 500 Aktienindex im Zeitraum von 05.01.1960 bis 16.10.1987 (d.h 6985 Beobachtungen).

   a) Erzeugen Sie für die Zeitreihe mit den täglichen logarithmierten Renditen des S&P 500 Aktienindex vom 05.01.1960 bis 16.10.1987 und für die 28 jährlichen Maxima jeweils eine Abbildung.
   b) Passen Sie mittels der Block-Maxima-Methode eine verallgemeinerte Extremwertverteilung an die 28 jährlichen Maxima $M_{r1}, \ldots, M_{r28}$ an.
   c) Bestimmen Sie die Wiederkehrwerte (Return Levels) zu den Überschreitungswahrscheinlichkeiten $p = 0{,}1;\ 0{,}05$ und $0{,}01$.

7) Berechnen Sie für eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit Shape-Parameter $\xi < 1$ das Verhältnis der beiden Risikomaße $\text{ES}_q(X)$ und $\text{VaR}_q(X)$ für $q \to 1$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

8) Weisen Sie nach, dass der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X mit einer verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit Shape-Parameter $\xi \in \mathbb{R}$, Lokalisationsparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Skalierungsparameter $\sigma > 0$ genau dann existiert, wenn $\xi < 1$ gilt und dieser dann gegeben ist durch

$$\mathbb{E}[X] = \mu + \frac{\sigma}{1-\xi}.$$

9) Ein Aktuar möchte für die Einzelschadenhöhen in einem Autoversicherungsportfolio den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall zu verschiedenen Sicherheitsniveaus $q \in (0,1)$ aus den vorhandenen Daten schätzen. Es liegen ihm insgesamt 200 beobachtete Einzelschadenhöhen X_i vor und nach einer Auswertung der Daten nimmt er an, dass die Einzelschadenhöhen X_i ab dem Schwellwert $u = 1$ (in Millionen US-Dollar) verallgemeinert Pareto-verteilt sind mit den geschätzten Parametern $\widehat{\xi} = 0{,}8$ und $\widehat{\sigma} = 0{,}65$. Die untenstehende Tabelle zeigt in absteigender Reihenfolge die 24 Einzelschadenhöhen X_i, die den Schwellenwert von $u = 1$ überschritten haben.

11,33	6,17	4,67	4,41	4,20	3,31	2,97	2,65	2,58	2,29	2,12	1,76
1,35	1,34	1,28	1,27	1,25	1,15	1,13	1,10	1,09	1,07	1,02	1,01

a) Bestimmen Sie Schätzungen für den Value-at-Risk zu den Sicherheitsniveaus $q = 95\%, 99\%$ und $q = 99{,}9\%$.

b) Bestimmen Sie Schätzungen für den Expected-Shortfall zu den Sicherheitsniveaus $q = 95\%, 99\%$ und $q = 99{,}9\%$.

10) Im `R`-Paket `evir` ist der Datensatz `bmw` enthalten. Er enthält die täglichen logarithmierten Renditen (daily log returns) $\ln(R_i/R_{i+1})$ der BMW-Aktie im Zeitraum von 02.01.1973 bis 23.07.1996 (d.h. 6146 Beobachtungen).

   a) Erzeugen Sie für die Zeitreihe mit den täglichen logarithmierten Renditen der BMW-Aktie vom 02.01.1973 bis 23.07.1996 und für die 283 monatlichen Maxima jeweils eine Abbildung.
   b) Passen Sie mittels der Block-Maxima-Methode eine verallgemeinerte Extremwertverteilung an die 283 monatlichen Maxima $M_{r1}, \ldots, M_{r283}$ an. Beurteilen Sie die Anpassungsgüte mit Hilfe eines QQ-Plots.
   c) Bestimmen Sie die Wiederkehrwerte (Return Levels) zu den Überschreitungswahrscheinlichkeiten $p = 0{,}1$; $0{,}05$ und $0{,}01$.
   d) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Mean-excess-Plot einen geeigneten Schwellenwert u für die Anpassung einer verallgemeinerten Pareto-Verteilung und passen Sie für diesen Schwellenwert eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung an. Untersuchen Sie anschließend die Sensitivität der ML-Schätzung für den Shape-Parameter ξ bzgl. der Wahl des Schwellenwerts u.

e) Untersuchen Sie die Anpassungsgüte der in Aufgabenteil d) angepassten verallgemeinerten Pareto-Verteilung.

f) Bestimmen Sie für die angepasste verallgemeinerte Pareto-Verteilung Schätzungen für den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall zu den Sicherheitsniveaus $q = 0{,}9; 0{,}95; 0{,}99; 0{,}999; 0{,}9999$. Untersuchen Sie anschließend die Sensitivität der Schätzung $\widehat{\mathrm{VaR}}_{0,99}(X)$ bzgl. der Wahl des Schwellenwerts u.

Übungsaufgaben zu Kapitel 8

Übungsaufgaben

1) Der zweidimensionale Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ habe die Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 4 \text{ und } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   a) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$.
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(2 \leq X_1 \leq 3; 1/2 \leq X_2 \leq 1)$.
   c) Bestimmen Sie die Randdichtefunktionen f_{X_1} und f_{X_2}.
   d) Ermitteln Sie die bedingten Dichtefunktionen $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ und $f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$ für $0 \leq x_1 \leq 4$ und $0 \leq x_2 \leq 1$.

2) Gegeben sei die Funktion

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 + x_2 < 0 \\ 1 & \text{für } x_1 + x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

   Zeigen Sie, dass es sich bei dieser Funktion um keine Verteilungsfunktion handeln kann.

3) Der zweidimensionale Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ habe die Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(4x_1x_2 + 1) & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ und } 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{X}}$.
b) Bestimmen Sie die Randdichtefunktionen f_{X_1} und f_{X_2} und prüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind.
d) Ermitteln Sie die bedingte Dichtefunktion $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ und die bedingte Verteilungsfunktion $F_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ für $0 \leq x_2 \leq 1$ sowie speziell $f_{X_1|X_2}(x_1|1/4)$ und $F_{X_1|X_2}(x_1|1/4)$.

4) Der dreidimensionale Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ habe die Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{36}{(1+x_1+x_2)^5(1+x_3)^4} & \text{für } x_1, x_2, x_3 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Untersuchen Sie, ob die Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 stochastisch unabhängig sind.
b) Ermitteln Sie die Varianz-Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$.
c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_1X_3]$, $\mathbb{E}[X_1|X_3 = x_3]$ und $\operatorname{Var}(X_1|X_3 = x_3)$.
d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X_1|X_2 = x_2]$ und $\mathbb{E}[X_2|X_1 = x_1]$.

5) Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit der Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}$ sowie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Ermitteln Sie die Dichtefunktion des n-dimensionalen Zufallsvektors

$$\mathbf{Y} = h(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}.$$

6) Der zweidimensionale Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ habe die Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{6}{x_1^3 x_2^4} & \text{für } x_1, x_2 > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Ermittlen Sie die Dichtefunktion des zweidimensionalen Zufallsvektors

$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T = (X_1 \cdot X_2, X_2)^T.$$

b) Bestimmen Sie die Randdichtefunktionen von Y_1 und Y_2.

c) Ermitteln Sie die bedingte Dichtfunktion von Y_1 unter der Bedingung $Y_2 = 2$ und die bedingte Dichtfunktion von Y_2 unter der Bedingung $Y_1 = 2$.

7) Es gelte $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ mit

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie die Verteilung von X_3 unter der Bedingung $X_1 = 0$ und $X_2 = 0$.
   b) Bestimmen Sie die Verteilung von X_1 unter der Bedingung $X_2 = 0$ und $X_3 = 0$.
   c) Bestimmen Sie die Verteilung von X_2 unter der Bedingung $X_1 = 0$ und $X_3 = 0$.
   d) Ermitteln Sie $\mathbb{E}[X_1 | X_2 = x_2]$ und $\mathbb{E}[X_2 | X_1 = x_1]$.
   e) Geben Sie den geometrischen Ort aller Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ an, für welche die Dichtefunktion von $(X_1, X_2)^T$ den Wert $(16\pi)^{-1}$ aufweist.

8) Nehmen Sie zu der folgenden Behauptung Stellung: Aus $X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ folgt stets $X_1 + X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \mu, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

9) Erläutern Sie, weshalb im Falle von $(X_1, \ldots, X_n)^T \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ aus der Unkorrliertheit der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ auch deren stochastische Unabhängigkeit folgt.

10) a) Der zweidimensionale Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ sei normalverteilt mit Korrelationskoeffizient $\rho \in [-1, 1]$. Ermitteln Sie $\mathrm{VaR}_q(X_1 + X_2)$ für $q \in (0, 1)$.
b) Es gelte $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Bestimmen Sie $\mathrm{VaR}_q(X_1 + \ldots + X_n)$ für $q \in (0, 1)$.

11) Es sei W eine diskrete Zufallsvariable mit

$$\mathbb{P}(W = w) = \begin{cases} p & \text{für } w = 1 \\ 1 - p & \text{für } w = 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für ein $p \in (0, 1)$ und durch Z_1 und Z_2 seien zwei stochastisch unabhängige und standardnormalverteile Zufallsvariablen gegeben, die stochastisch unabhängig von W sind. Ferner sei

$$X_1 = \sqrt{W}(Z_1 + 2Z_2) \qquad \text{und} \qquad X_2 = a + \sqrt{W} Z_2$$

für ein $a \in \mathbb{R}$.

a) Weisen Sie nach, dass $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ eine Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung besitzt.
b) Bestimmen Sie die Varianz-Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$ für $p = \frac{2}{3}$.
c) Ermitteln Sie für $p \in (0, 1)$ die Verteilungsfunktion von $X_1 + X_2$.

12) Es sei W eine absolutstetige Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F_W(w) = \begin{cases} 1 - w^{-\theta} & \text{für } w \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für ein $\theta \in (1, \infty)$ und durch Z_1 und Z_2 seien zwei stochastisch unabhängige und standardnormalverteile Zufallsvariablen gegeben, die stochastisch unabhängig von W sind. Ferner sei

$$X_1 = \sqrt{W}(Z_1 + Z_2) \qquad \text{und} \qquad X_2 = \sqrt{W}(Z_1 - Z_2).$$

a) Weisen Sie nach, dass $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ eine Varianz-gemischte multivariate Normalverteilung besitzt.
b) Bestimmen Sie die Varianz-Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$ und zeigen Sie, dass die beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 unkorreliert sind.

13) Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ ein $\mathrm{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \phi)$-verteilter Zufallsvektor, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{A}$ eine $(m \times n)$-Matrix vom Rang $m \leq n$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\mathbf{AX} + \mathbf{b} \sim \mathrm{E}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T, \phi).$$

14) Die beiden n-dimensionalen Zufallsvektoren $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ seien stochastisch unabhängig und $\mathrm{E}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}, \phi_1)$- bzw. $\mathrm{E}(\boldsymbol{\mu}_2, c\boldsymbol{\Sigma}, \phi_2)$-verteilt mit $c > 0$. Weisen Sie nach, dass dann

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} \sim \mathrm{E}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}, \widetilde{\phi})$$

gilt. Geben Sie ferner den charakteristischen Generator $\widetilde{\phi}$ der elliptischen Verteilung von $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ an.

Übungsaufgaben zu Kapitel 9

Übungsaufgaben

1) Es sei $X \sim \mathrm{U}[-1,1]$ und $Y := X^2$. D.h. X besitzt die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   a) Weisen Sie nach, dass X und Y unkorreliert sind.
   b) Zeigen Sie, dass X und Y nicht stochastisch unabhängig sind (Hinweis: Berechnen Sie hierzu die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq -1/4, Y \leq 1/4)$, $\mathbb{P}(X \leq -1/4)$ und $\mathbb{P}(Y \leq 1/4)$).

2) Es gelte $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

   a) Welche Abhängigkeitsbeziehung besteht zwischen $X_1 := e^Z$ und $X_2 := e^{\sigma Z}$ für $\sigma > 0$.
   b) Berechnen Sie den linearen Korrelationskoeffizienten $\rho(X_1, X_2)$ von X_1 und X_2 in Abhängigkeit von $\sigma > 0$.
   c) Stellen Sie die Werte des linearen Korrelationskoeffizienten $\rho(X_1, X_2)$ in Abhängigkeit von $\sigma > 0$ dar und interpretieren Sie das Ergebnis.

3) Gegeben sei der bivariate Zufallsvektor $(X_1, X_2)^T \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{E})$ sowie die Zufallsvariablen $Y_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$ und $Y_2 := VY_1$. Die Zufallsvariablen V und Y_1 seien ferner stochastisch unabhängig und es gelte $\mathbb{P}(V=-1) = \mathbb{P}(V=1) = \frac{1}{2}$.

   a) Zeigen Sie, dass $Y_2 \sim \mathrm{N}(0,1)$ gilt und berechnen Sie $\rho(Y_1, Y_2)$.
   b) Bestimmen Sie $\mathrm{VaR}_q(X_1 + X_2)$ für $q \in (0,1)$ und stellen Sie $\mathrm{VaR}_q(Y_1 + Y_2)$ für $q \in \big(F_{Y_1+Y_2}(0), 1\big)$ in Abhängigkeit von $\mathrm{VaR}_{2q-1}(X_1)$ dar.
   c) Interpretieren Sie das Ergebnis.

4) Weisen Sie nach, dass der Zufallsvektor $\mathbf{U} = (U, 1-U, 1-U)^T$ mit $U \sim \mathrm{U}[0,1]$ die Verteilungsfunktion

$$C(u_1, u_2, u_3) = \max\big\{\min\{u_2, u_3\} + u_1 - 1, 0\big\}$$

besitzt.

5) Die Dichtefunktion des bivariaten Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ sei gegeben durch

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 e^{-x_1(x_2+1)} & \text{für } x_1, x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion des bivariaten Zufallsvektors $\mathbf{X}$.
b) Ermitteln Sie die Randverteilungsfunktionen von X_1 und X_2 und geben Sie an, ob X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind.
c) Bestimmen Sie die verallgemeinerten inversen Verteilungsfunktionen (Quantilfunktionen) $F_{X_1}^{-1}$ und $F_{X_2}^{-1}$ und damit anschließend die Copula des Zufallsvektors $\mathbf{X}$.

6) Die Verteilungsfunktion der bivariaten Standard-Exponentialverteilung mit Parameter $\vartheta \in (0, 1)$ ist gegeben durch

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-(x_1 + x_2 + \vartheta x_1 x_2)} & \text{für } x_1, x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Weisen Sie nach, dass es sich bei den beiden Randverteilungen von $F_{\mathbf{X}}$ um Exponentialverteilungen mit Parameter $\lambda = 1$ handelt.
b) Bestimmen Sie die Copula von $F_{\mathbf{X}}$.
c) Zeigen Sie, dass die Copula aus Aufgabenteil b) für $\vartheta \to 0$ gegen die Unabhängigkeitscopula konvergiert.

7) Die Zufallsvariablen U_1 und U_2 seien stochastisch unabhängig und es gelte $U_1, U_2 \sim \mathrm{U}[0,1]$. Ferner sei

$$X_1 := \left(\max\{U_1, U_2\}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad X_2 := \left(\max\{1-U_1, 1-U_2\}\right)^2.$$

a) Zeigen Sie, dass $X_1, X_2 \sim \mathrm{U}[0,1]$ gilt.
b) Weisen Sie nach, dass die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ eine Copula ist, deren Dichte gegeben ist durch

$$c(u_1, u_2) = \frac{1}{2\sqrt{u_1 u_2}} \qquad \text{für } u_1, u_2 \in (0,1]$$

8) Die folgende Tabelle enthält $n = 10$ Wertepaare (x_i, y_i) mit Renditen der BMW- und Siemensaktie:

i	x_i (BMW-Aktie)	y_i (Siemensaktie)
1	0,0030	-0,0051
2	0,0224	0,0072
3	-0,0059	-0,0055
4	0,0206	0,0017
5	-0,0058	0,0160
6	-0,0118	-0,0013
7	0,0064	0,0219
8	0,0039	0,0016
9	-0,0015	-0,0156
10	-0,0238	-0,0222

a) Berechnen Sie den empirischen linearen Korrelationskoeffizienten $r(X,Y)$.

b) Ermitteln Sie den (empirischen) Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman $r_S(X,Y)$.

c) Bestimmen Sie den (empirischen) Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall $r_\tau(X,Y)$.

9) Zeigen Sie für die bivariate Clayton-Copula gilt:

a) $C^{Cl}_{-1}(u_1,u_2) = W(u_1,u_2)$, $\lim\limits_{\theta\to 0} C^{Cl}_\theta(u,v) = \Pi(u,v)$ und $\lim\limits_{\theta\to\infty} C^{Cl}_\theta(u,v) = M(u,v)$

b) $\lambda_l(X,Y) = 2^{-1/\theta}$ und $\lambda_u(X,Y) = 0$ für $\theta \in (0,\infty)$

10) Es gelte $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ und $Y := X^2$. Berechnen Sie den unteren und oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten $\lambda_l(X,Y)$ bzw. $\lambda_u(X,Y)$.

11) Betrachtet wird ein Versicherungsportfolio mit den folgenden der Größe nach geordneten $n = 12$ Schadenhöhen und den damit korrespondierenden Schadenregulierungskosten (allocated loss adjustment expenses (ALAE)):

i	x_i (Schadenhöhe)	y_i (ALAE)
1	1500	301
2	2500	415
3	4500	395
4	5750	34474
5	7100	10593
6	9000	406
7	11750	2530
8	14000	175
9	15000	2072
10	19833	212
11	33033	7845
12	62500	12251

a) Bestimmen Sie $r_\tau(X,Y)$.

b) Passen Sie mit Hilfe von $r_\tau(X,Y)$ eine (bivariate) Gumbel-Copula an die Daten an.

12) Betrachtet wird die (bivariate) Clayton-Copula

$$C_\theta^{Cl}(u_1,u_2) = \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta} \qquad \text{mit } \theta \in [-1,\infty).$$

a) Es gelte $X \sim \text{Weibull}(1/2,2)$ und $Y \sim \Gamma(3,1/2)$. Bestimmen Sie

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}[X], Y \leq \mathbb{E}[Y])$$

für den Fall, dass der bivariate Zufallsvektor $(X,Y)^T$ eine Clayton-Copula $C_\theta^{Cl}(u_1,u_2)$ mit dem Parameter $\theta = 10$ besitzt.

b) Bestimmen Sie die Dichte von $C_\theta^{Cl}(u_1,u_2)$.

c) Es gelte nun $X \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ und $Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ mit $\lambda_1,\lambda_2 > 0$ und der bivariate Zufallsvektor $(X,Y)^T$ besitze die Copula $C_\theta^{Cl}(u_1,u_2)$. Vom Zufallsvektor $(X,Y)^T$ liegen ferner die folgenden Beobachtungen vor:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	2,5	2,6	1,3	2,7	1,4	2,9	4,5	5,3
y_i	3,5	4,2	1,9	4,8	2,6	5,6	6,8	7,8

Passen Sie die Copula $C_\theta^{Cl}(u_1,u_2)$ mittels der ML-Methode an die Daten an und berechnen Sie eine Schätzung für $\mathbb{P}(X \leq 3, Y \leq 4)$.

Übungsaufgaben zu Kapitel 10

Übungsaufgaben

1) Betrachtet wird der lineare Kongruenzgenerator mit den folgenden Parameterwerten

$$a = 27, \quad c = 31 \quad \text{und} \quad m = 2^9 = 512$$

sowie dem Keim $x_0 = 3$.

a) Ermitteln Sie fünf Pseudozufallszahlen für die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0,1)$.

b) Ermitteln Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a) fünf Pseudozufallszahlen für die Gleichverteilung auf dem Intervall $[2,7)$.

2) Der Gesamtschaden eines Versicherungsportfolios sei gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

wobei die Schadenanzahl N und die identisch-verteilten Einzelschadenhöhen $X_1, X_2, \ldots$ stochastisch unabhängig sind und für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von N

$$\mathbb{P}(N = n) = 0{,}9 \cdot 0{,}1^{n-1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

bzw. für die Dichtefunktion von X

$$f_X(x) = 0{,}01 \cdot e^{-0{,}01} \qquad \text{für } x > 0$$

gilt. Die Erzeugung von Pseudozufallszahlen für die Verteilungsfunktionen F_N und F_X erfolge mittels der Inversionsmethode und den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ und $V_1, V_2, \ldots \sim \mathrm{U}(0,1)$. Ermitteln Sie eine Pseudozufallszahl für die Verteilungsfunktion F_S der Gesamtschadenhöhe S, wenn für die Zufallsvariablen U, V_1, V_2, V_3, V_4 die folgenden Realisierungen vorliegen:

$$u = 0{,}05,\ v_1 = 0{,}3,\ v_2 = 0{,}22,\ v_3 = 0{,}52,\ v_4 = 0{,}46$$

3) Die Gesamtschadenhöhe eines Versicherungsportfolios sei gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

wobei die Schadenanzahl N und die identisch-verteilten Einzelschadenhöhen $X_1, X_2, \ldots$ stochastisch unabhängig sind und für die Verteilungsfunktion F_N von N

n	$F_N(n)$
0	0,125
1	0,312
2	0,500
3	0,656
4	0,773
5	0,855
$\vdots$	$\vdots$

bzw. für die Verteilungsfunktion F_X der Einzelschadenhöhen

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/200)^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gelte.

Übungsaufgaben

Zusätzlich wird angenommen, dass pro Schaden der gedeckte Höchstschaden $l = 650$ beträgt und ein Selbstbehalt von $d = 150$ existiert. Die nun resultierende Gesamtschadenhöhe und ihre Verteilungsfunktion werden mit $\widetilde{S}$ bzw. $F_{\widetilde{S}}$ bezeichnet.

Die Erzeugung von Pseudozufallszahlen für die Verteilungsfunktionen F_N und F_X erfolge jeweils mittels der Inversionsmethode und den voneinander stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ und $V_1, V_2, \ldots \sim \mathrm{U}(0,1)$. Ermitteln Sie unter Berücksichtigung des gedeckten Höchstschadens $l = 650$ und Selbstbehalts $d = 150$ pro Schaden eine Pseudozufallszahl für die Verteilungsfunktion $F_{\widetilde{S}}$, wenn für die Zufallsvariablen $U, V_1, V_2, \ldots$ die folgenden Realisierungen vorliegen:

$$u = 0{,}7654,\ v_1 = 0{,}2738,\ v_2 = 0{,}5152,\ v_3 = 0{,}7537,\ v_4 = 0{,}6481,\ v_5 = 0{,}3153$$

4) Betrachtet wird eine Verteilungsfunktion F mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{für } x \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Verwerfungsmethode und der Hilfsdichte

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

einen Algorithmus zur Erzeugung von F-verteilten Pseudozufallszahlen.

b) Bestimmen Sie die Effizienz dieses Algorithmus.

5) Die Zufallsvariable X sei invers Pareto-verteilt mit den Parametern $\alpha, \lambda > 0$. D.h. sie besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{x+\lambda}\right)^{\alpha} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und es gilt

$$\mathbb{E}[X^{-1}] = \frac{1}{\lambda(\alpha-1)} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{E}[X^{-2}] = \frac{1}{\lambda^2(\alpha-1)(\alpha-2)}.$$

Im Folgenden sei $\alpha = \lambda = 4$.

a) Erzeugen Sie mit Hilfe der Inversionsmethode und $U \sim \mathrm{U}(0,1)$ eine Zufallsvariable, die inverse Pareto-verteilt ist.
b) Ermitteln Sie für die beiden Momente $\mathbb{E}[X^{-1}]$ und $\mathbb{E}[X^{-2}]$ eine (naive) Monte-Carlo-Schätzung vom Simulationsumfang $n = 50$.
c) Bestimmen Sie eine Monte-Carlo-Schätzung für das 95%-Konfidenzintervall von $\mathbb{E}[X^{-1}]$ und geben Sie an, ob dieses Intervall den wahren Wert von $\mathbb{E}[X^{-1}]$ enthält.

6) Es wird ein Versicherungsportfolio aus Haftpflicht- und Feuerrisiken betrachtet. Die Schadenhöhen X und Y (in Millionen Euro) der beiden Teilportfolios bestehend aus Haftpflicht- bzw. Feuerrisiken seien jeweils lognormalverteilt mit

$$X \sim \mathrm{LN}(-0{,}0277; 0{,}0149) \qquad \text{und} \qquad Y \sim \mathrm{LN}(-0{,}1099; 0{,}0089).$$

D.h. die Gesamtschadenhöhe für das gesamte Versicherungsportfolio beträgt

$$S = X + Y,$$

wobei jedoch die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors $(X,Y)^T$ unbekannt ist. Es sollen die Beiträge dieser beiden Teilportfolios am Gesamtrisikokapitalbedarf quantifiziert werden, wenn das hierzu verwendete Allokationsverfahren das Conditional-Tail-Expectation-Prinzip zum Sicherheitsniveau $q = 95\%$ ist (vgl. Abschnitt 3.7). Dabei soll insbesondere untersucht werden, wie sie sich die Verwendung der Copulas $C^{Ga}_{0,2}(u,v)$, $C^{t}_{4;0,2}(u,v)$, $C^{Gu}_{4}(u,v)$ und $C^{Cl}_{4}(u,v)$ für die Abhängigkeiten zwischen den beiden Teilportfolios auf die Höhe des resultierenden Risikokapitals für das gesamte Versicherungsportfolio auswirkt. Ermitteln Sie hierzu jeweils für die vier verschiedenen Copulas mit Hilfe von 5000 simulierten Beobachtungen von $(X,Y)^T$ eine Monte-Carlo-Schätzung für $\mathrm{RK}(X) = \mathbb{E}[X|S > \mathrm{VaR}_{0,95}(S)]$, $\mathrm{RK}(Y) = \mathbb{E}[Y|S > \mathrm{VaR}_{0,95}(S)]$ und $\mathrm{RK}(S) = \mathbb{E}[S|S > \mathrm{VaR}_{0,95}(S)]$.

7) Es gelte $X := U^2$ und $Y := (1-U)^2$ mit $U \sim \mathrm{U}(0,1)$.

a) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ und $\mathrm{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right)$.

b) Bestimmen Sie eine (naive) Monte-Carlo-Schätzung für das Integral

$$\int_0^1 u^2\,du$$

unter Verwendung von 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $U_1, \ldots, U_{100} \sim \mathrm{U}(0,1)$. Ermitteln Sie ferner eine Schätzung für die Varianz dieser Monte-Carlo-Schätzung.

c) Zeigen Sie, wie die Monte-Carlo-Schätzung aus Aufgabenteil b) verbessert werden kann, wenn weiterhin nur die 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $U_1, \ldots, U_{100} \sim \mathrm{U}(0,1)$ aus Aufgabenteil b) zur Verfügung stehen.

8) Betrachtet wird das Integral

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e - 1}\, dx.$$

a) Ermitteln Sie für das obige Integral eine (naive) Monte-Carlo-Schätzung unter Verwendung von 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $X_1, \ldots, X_{100} \sim \mathrm{U}(0,1)$.

b) Bestimmen Sie für das Integral in Aufgabenteil a) eine Monte-Carlo-Schätzung unter Verwendung von 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $X_1, \ldots, X_{100} \sim \mathrm{U}(0,1)$ und 100 zusätzlichen antithetischen Pseudozufallszahlen $X_{101}, \ldots, X_{200} \sim \mathrm{U}(0,1)$.

c) Bestimmen Sie nun für das Integral in Aufgabenteil a) eine Monte-Carlo-Schätzung unter Verwendung von 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $X_1, \ldots, X_{100} \sim \mathrm{U}(0,1)$ und der Hilfsfunktion $h(x) := \frac{x}{e-1}$ für $x \in [0,1]$.

d) Vergleichen Sie die drei Monte-Carlo-Schätzungen aus den Aufgabenteilen a) bis c).