Statistik I
WS 2013/2014
Musterlösung 7
Aufgaben 23–27

Aufgabe 23

Man verwendet nachfolgende Tabelle.

i	$p_{I,i}$	$p_{II,i}$	$u_{I,i}$	$u_{II,i}$	$q_{I,i}$	$q_{II,i}$	$p_{II,i} \cdot q_{I,i}$	$p_{I,i} \cdot q_{II,i}$
1	5	6	50	48	10	8	60	40
2	4	6	200	240	50	40	300	160
3	10	9	80	144	8	16	72	160
4	8	10	48	40	6	4	60	32
5	3	3	30	24	10	8	30	24
Summe			408	496			522	416

Dabei verwendet man folgende Beziehungen $(i = 1, \ldots, 5)$:

$$q_{I,i} = \frac{u_{I,i}}{p_{I,i}}$$

$$q_{II,i} = \frac{u_{II,i}}{p_{II,i}}$$

(a) Als Wert für den Preisindex nach Laspeyres bzw. Paasche mit I als Basis- und II als Berichtsperiode erhält man:

$$P_{I,II}^{\text{Las}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{II,i} \cdot q_{I,i}}{\sum_{i=1}^{n} p_{I,i} \cdot q_{I,i}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{5} p_{II,i} \cdot q_{I,i}}{\sum_{i=1}^{5} u_{I,i}}$$

$$= \frac{522}{408}$$

$$\approx 1,2794$$

$$
\begin{aligned}
P_{I,II}^{\text{Pa}} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{II,i} \cdot q_{II,i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{I,i} \cdot q_{II,i}} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{5} u_{II,i}}{\sum\limits_{i=1}^{5} p_{I,i} \cdot q_{II,i}} \\
&= \frac{496}{416} \\
&\approx 1,1923
\end{aligned}
$$

(b) Als Wert für den Preisindex nach Laspeyres bzw. Paasche mit II als Basis- und I als Berichtsperiode erhält man:

$$
\begin{aligned}
P^{\mathrm{Las}}_{II,I} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{I,i} \cdot q_{II,i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{II,i} \cdot q_{II,i}} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{5} p_{I,i} \cdot q_{II,i}}{\sum\limits_{i=1}^{5} u_{II,i}} \\
&= \frac{416}{496} \\
&\approx 0,8387
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{II,I}^{\mathrm{Pa}} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{I,i} \cdot q_{I,i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{II,i} \cdot q_{I,i}} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{5} u_{I,i}}{\sum\limits_{i=1}^{5} p_{II,i} \cdot q_{I,i}} \\
&= \frac{408}{522} \\
&\approx 0{,}7816
\end{aligned}
$$

Aufgabe 24

(a) Für die Parameter $\hat{a}$ und $\hat{b}$ der Regressionsgeraden berechnet man:

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t \\
&= \frac{1}{19}\cdot(71,3 + 81,2 + 93,5 + \ldots + 284,4) \\
&= \frac{3128,5}{19} \\
&\approx 164,6579
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n} t\cdot y_t &= 1\cdot 71,3 + 2\cdot 81,2 + 3\cdot 93,5 + \ldots + 19\cdot 284,4 \\
&= 37583,2
\end{aligned}$$

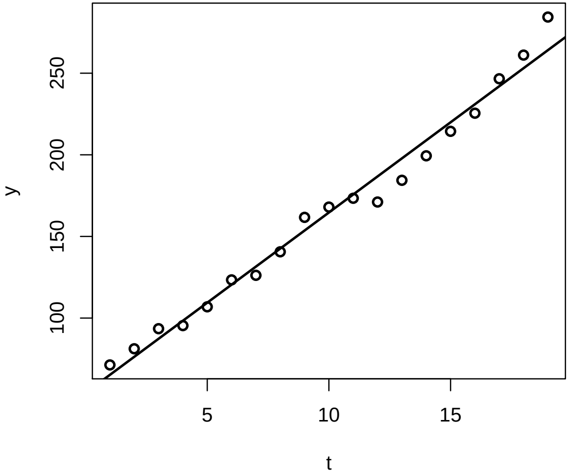
Damit erhält man:

$$
\begin{aligned}
\hat{b} &= \frac{12 \cdot \sum\limits_{t=1}^{n} t \cdot y_t - 6n(n+1)\bar{y}}{n^3 - n} \\
&\approx \frac{12 \cdot 37583{,}2 - 6 \cdot 19 \cdot (19+1) \cdot 164{,}6579}{19^3 - 19} \\
&= 11{,}0495 \\
\hat{a} &= \bar{y} - \hat{b} \cdot \frac{n+1}{2} \\
&\approx 164{,}6579 - 11{,}0495 \cdot \frac{19+1}{2} \\
&= 54{,}1632
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich für die Regressionsgerade:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \hat{a} + \hat{b} \cdot t \\ &= 54,1632 + 11,0495 \cdot t \end{aligned}$$

(b)



(c) Für $t = 21$ erhält man:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{21} &= 54,1632 + 11,0495 \cdot 21 \\ &= 286,2027\end{aligned}$$

Es ergäben sich Sichteinlagen in Höhe von etwa $286,2027$ Mrd. EUR.

Aufgabe 25

Es ist:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) =& \{\emptyset, \{\text{blau}\}, \{\text{rot}\}, \{\text{gelb}\},\\
& \{\text{blau, rot}\}, \{\text{blau, gelb}\}, \{\text{rot, gelb}\}, A\}\\
B \cup C =& \{0; 1; 2; \sqrt{7}; 3; \pi; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}\\
B \cap C =& \{1; 5\}\\
C \backslash B =& \{2; 3; 4; 6; 7; 8; 9\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 26

Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 25 erkennt man, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ gilt. Somit sind noch folgende drei Eigenschaften zu zeigen.

(a) $A \in \mathcal{A}$

Offensichtlich erfüllt.

(b) $B \in \mathcal{A} \Rightarrow B^c \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\emptyset^c &= A \in \mathcal{A} \\
\{\text{rot}\}^c &= \{\text{blau, gelb}\} \in \mathcal{A} \\
\{\text{blau, gelb}\}^c &= \{\text{rot}\} \in \mathcal{A} \\
A^c &= \emptyset \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

(c) $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow B_1 \cup B_2 \cup \ldots \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\emptyset \cup \{\text{rot}\} &= \{\text{rot}\} \in \mathcal{A} \\
\emptyset \cup \{\text{blau, gelb}\} &= \{\text{blau, gelb}\} \in \mathcal{A} \\
\emptyset \cup A &= A \in \mathcal{A} \\
\{\text{rot}\} \cup \{\text{blau, gelb}\} &= A \in \mathcal{A} \\
\{\text{rot}\} \cup A &= A \in \mathcal{A} \\
\{\text{blau, gelb}\} \cup A &= A \in \mathcal{A} \\
\emptyset \cup \{\text{rot}\} \cup \{\text{blau, gelb}\} &= A \in \mathcal{A} \\
\emptyset \cup \{\text{rot}\} \cup A &= A \in \mathcal{A} \\
\emptyset \cup \{\text{blau, gelb}\} \cup A &= A \in \mathcal{A} \\
\{\text{rot}\} \cup \{\text{blau, gelb}\} \cup A &= A \in \mathcal{A} \\
\emptyset \cup \{\text{rot}\} \cup \{\text{blau, gelb}\} \cup A &= A \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Aufgabe 27

Folgende drei Mengen genügen obigen Bedingungen:

$$A_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 0,3 \vee 0,7 \leq x \leq 1\}$$
$$A_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 0,6\}$$
$$A_3 := \{x \in \mathbb{R} \mid 0,4 \leq x \leq 1\}$$

Dann ist:

$$A_1 \cap A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 0,3\} \neq \emptyset$$
$$A_1 \cap A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0,7 \leq x \leq 1\} \neq \emptyset$$
$$A_2 \cap A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0,4 \leq x \leq 0,6\} \neq \emptyset$$

Außerdem ist $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.