Statistik I

WS 2013/2014

Musterlösung 8

Aufgaben 28-32

Aufgabe 28

(a)

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - 0,5 \\ &= 0,5 \\ P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0,5 + 0,2 - 0,7 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Mit Hilfe der De Morgan'schen Regeln berechnet man:

$$\begin{aligned}
P(A^c \cap C^c) &= P((A \cup C)^c) \\
&= 1 - P(A \cup C) \\
&= 1 - 0,6 \\
&= 0,4 \\
P(A^c \cup C^c) &= P((A \cap C)^c) \\
&= 1 - P(A \cap C) \\
&= 1 - (P(A) + P(C) - P(A \cup C)) \\
&= 1 - (0,5 + 0,3 - 0,6) \\
&= 0,8
\end{aligned}$$

(c) Da bereits $P(A \cap B) = 0$ ist, gilt:

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

(d) Das Ereignis C (bzw. B) kann in die beiden disjunkten Ereignisse $C \cap B$ und $C \cap B^c$ (bzw. $B \cap C$ und $B \cap C^c$) zerlegt werden. Damit ist:

$$
\begin{aligned}
P(C) &= P(C \cap B) + P(C \cap B^c) \\
P(B) &= P(B \cap C) + P(B \cap C^c)
\end{aligned}
$$

Hieraus erhält man:

$$
\begin{aligned}
P(C \cap B^c) &= P(C) - P(C \cap B) \\
&= 0,3 - 0,1 \\
&= 0,2 \\
P(B \cap C^c) &= P(B) - P(B \cap C) \\
&= 0,2 - 0,1 \\
&= 0,1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 29

Es existieren insgesamt 36 mögliche Ergebnisse. Diese sind:

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}
$$

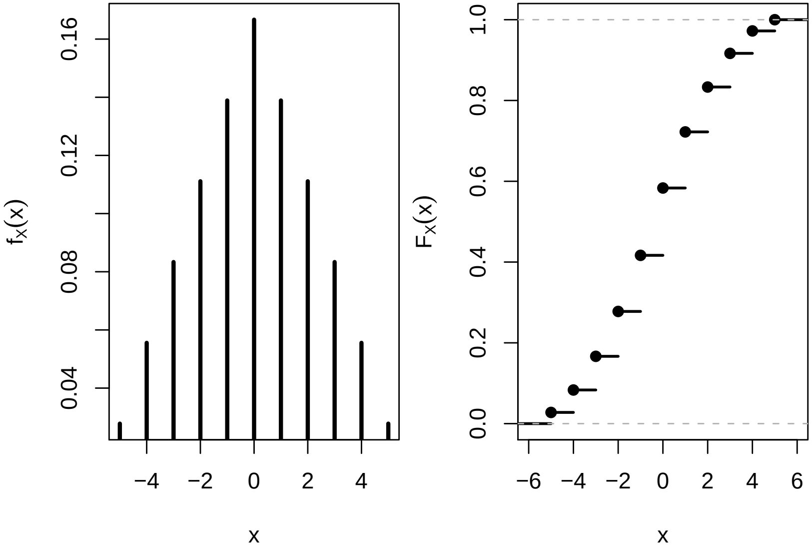
Die Zufallsvariable X nimmt somit folgende Ausprägungen x (mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $f_X(x)$) an:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(X = x) = f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Damit erhält man nachfolgende Wahrscheinlichkeits- bzw. Verteilungsfunktion.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{für } x = -5 \\ \frac{2}{36} = \frac{1}{18} & \text{für } x = -4 \\ \frac{3}{36} = \frac{1}{12} & \text{für } x = -3 \\ \frac{4}{36} = \frac{1}{9} & \text{für } x = -2 \\ \frac{5}{36} & \text{für } x = -1 \\ \frac{6}{36} = \frac{1}{6} & \text{für } x = 0 \\ \frac{5}{36} & \text{für } x = 1 \\ \frac{4}{36} = \frac{1}{9} & \text{für } x = 2 \\ \frac{3}{36} = \frac{1}{12} & \text{für } x = 3 \\ \frac{2}{36} = \frac{1}{18} & \text{für } x = 4 \\ \frac{1}{36} & \text{für } x = 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -5 \\ \frac{1}{36} & \text{für } -5 \leq x < -4 \\ \frac{3}{36} = \frac{1}{12} & \text{für } -4 \leq x < -3 \\ \frac{6}{36} = \frac{1}{6} & \text{für } -3 \leq x < -2 \\ \frac{10}{36} = \frac{5}{18} & \text{für } -2 \leq x < -1 \\ \frac{15}{36} = \frac{5}{12} & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ \frac{21}{36} = \frac{7}{12} & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ \frac{26}{36} = \frac{13}{18} & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ \frac{30}{36} = \frac{5}{6} & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ \frac{33}{36} = \frac{11}{12} & \text{für } 3 \leq x < 4 \\ \frac{35}{36} & \text{für } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{für } x \geq 5 \end{cases}$$



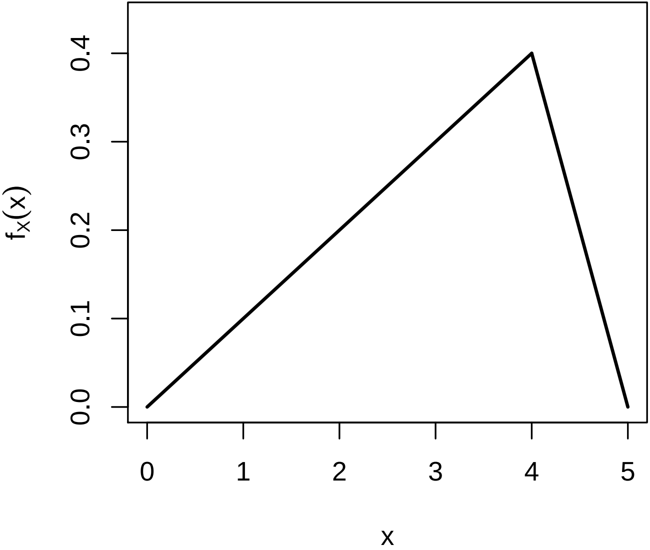
$f_X(x)$
0.04
0.08
0.12
0.16
−4
−2
0
2
4
x
$F_X(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−6
−4
−2
0
2
4
6
x

Für die beiden Wahrscheinlichkeiten berechnet man:

$$
\begin{aligned}
P(-1 \leq X \leq 2) &= F_X(2) - F_X(-1) + P(X = -1) \\
&= F_X(2) - F_X(-1) + f_X(-1) \\
&= F_X(2) - F_X(-2) \\
&= \frac{5}{6} - \frac{5}{18} \\
&= \frac{5}{9} \\
P(-1 < X \leq 2) &= F_X(2) - F_X(-1) \\
&= \frac{5}{6} - \frac{5}{12} \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 30

Grafische Darstellung der Dichtefunktion:



Für $0 \leq x \leq 4$ erhält man für $F_{X,1}(x)$:

$$
\begin{aligned}
F_{X,1}(x) &= \int_0^x 0,1y \ dy \\
&= \left[0,1 \cdot \frac{y^2}{2}\right]_0^x \\
&= [0,05y^2]_0^x \\
&= 0,05x^2 - 0,05 \cdot 0^2 \\
&= 0,05x^2
\end{aligned}
$$

Für $4 < x \leq 5$ erhält man für $F_{X,2}(x)$:

$$\begin{aligned} F_{X,2}(x) &= \int_0^4 0,1y \; dy + \int_4^x (2 - 0,4y) dy \\ &= F_{X,1}(4) - F_{X,1}(0) + [2y - 0,2y^2]_4^x \\ &= 0,8 - 0 + [(2x - 0,2x^2) - (8 - 3,2)] \\ &= -0,2x^2 + 2x - 4 \end{aligned}$$

Damit ist die Verteilungsfunktion für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 0,05x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ -0,2x^2 + 2x - 4 & \text{für } 4 < x \leq 5 \\ 1 & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

Aufgabe 31

Mit der gegebenen Dichtefunktion aus Aufgabe 30 berechnet man:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \\
&= \int_0^4 x \cdot 0,1x \; dx + \int_4^5 x \cdot (2 - 0,4x) dx \\
&= \int_0^4 0,1x^2 \; dx + \int_4^5 (2x - 0,4x^2) dx \\
&= \left[0,1 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^4 + \left[x^2 - 0,4 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_4^5 \\
&= \frac{6,4}{3} + \left(\left(25 - \frac{50}{3} \right) - \left(16 - \frac{25,6}{3} \right) \right) \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f_X(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx - (E[X])^2 \\
&= \int_0^4 x^2 \cdot 0,1x \ dx + \int_4^5 x^2 \cdot (2 - 0,4x)dx - 3^2 \\
&= \int_0^4 0,1x^3 \ dx + \int_4^5 (2x^2 - 0,4x^3)dx - 9 \\
&= \left[0,1 \cdot \frac{x^4}{4}\right]_0^4 + \left[2 \cdot \frac{x^3}{3} - 0,4 \cdot \frac{x^4}{4}\right]_4^5 - 9 \\
&= 6,4 + \left(\left(\frac{250}{3} - 62,5\right) - \left(\frac{128}{3} - 25,6\right)\right) - 9 \\
&= \frac{7}{6} \\
&= 1,1\overline{6}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 32

(1) Da g_1 nichtnegativ und $\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = 1 \Rightarrow g_1$ ist eine Dichtefunktion.

(2) g_2 ist weder eine Dichte- noch eine Verteilungsfunktion, da $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx \neq 1$ (also keine Dichtefunktion) und $\lim_{x\to\infty} e^x \neq 1$ (also keine Verteilungsfunktion).

(3) g_3 ist eine Verteilungsfunktion, da $\lim_{x\to-\infty} g_3(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g_3(x) = 1$ und $g_3'(x) = \frac{2}{9}x \geq 0$ für alle $0 \leq x \leq 3$ und g_3 rechtsseitig stetig ist.

(4) g_4 ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion, da $\sum_{x=1}^{7} \frac{x}{28} = 1$ und $g_4(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(5) g_5 ist die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen, da $\lim_{x\to-\infty} g_5(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} g_5(x) = 1$ und g_5 monoton steigend und rechtsseitig stetig.