Statistik I
WS 2013/2014
Musterlösung 9
Aufgaben 33-37

Aufgabe 33

Mit $A_j^{(i)}$ wird das Ereignis bezeichnet, dass beim i-ten Zug die Zahl j resultiert ($i = 1, \ldots, 10$; $j = 1, \ldots, 20$). Damit sind die Ereignisse $A_k^{(i)}$ und $A_l^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, 10$; $k, l = 1, \ldots, 20$; $k \neq l$) disjunkt. Außerdem sind, da die Kugeln nach dem Modell mit Zurücklegen entnommen werden, alle Ereignisse $A_j^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, 10$; $j = 1, \ldots, 20$) stochastisch unabhängig. Für die definierten Ereignisse gilt ($i = 1, \ldots, 10$; $j = 1, \ldots, 20$):

$$P(A_j^{(i)}) = \frac{1}{20}$$

Damit berechnet man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

(a)

$$
\begin{aligned}
P\left(A_3^{(1)} \cap A_3^{(2)} \cap A_3^{(3)} \cap A_3^{(4)}\right) &= \prod_{i=1}^{4} P\left(A_3^{(i)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{20}\right)^4 \\
&= 0,00000625
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&P\left(\left(A_1^{(1)} \cap A_1^{(2)} \cap A_1^{(3)}\right) \cup \left(A_1^{(1)} \cap A_1^{(2)} \cap A_2^{(3)}\right)\right. \\
&\qquad \left. \cup \left(A_1^{(1)} \cap A_2^{(2)} \cap A_1^{(3)}\right) \cup \left(A_2^{(1)} \cap A_1^{(2)} \cap A_1^{(3)}\right)\right) \\
=&P\left(A_1^{(1)} \cap A_1^{(2)} \cap A_1^{(3)}\right) + P\left(A_1^{(1)} \cap A_1^{(2)} \cap A_2^{(3)}\right) \\
&\qquad + P\left(A_1^{(1)} \cap A_2^{(2)} \cap A_1^{(3)}\right) + P\left(A_2^{(1)} \cap A_1^{(2)} \cap A_1^{(3)}\right) \\
=&\left(\frac{1}{20}\right)^3 \cdot 4 \\
=&0,0005
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
P\left(\left(A_{10}^{(1)}\right)^c \cap \left(A_{10}^{(2)}\right)^c\right) &= P\left(\left(A_{10}^{(1)}\right)^c\right) \cdot P\left(\left(A_{10}^{(2)}\right)^c\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{20}\right)^2 \\
&= 0,9025
\end{aligned}
$$

(d)

$$P\left(\left(A_{13}^{(1)}\right)^c \cap \left(A_{13}^{(2)}\right)^c \cap \ldots \cap \left(A_{13}^{(10)}\right)^c\right) = \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{10}$$
$$\approx 0,5987$$

Aufgabe 34

Es werden nachfolgende zwei Ereignisse definiert.

A : Die Bewerberin wird vom Sachbearbeiter als geeignet eingestuft.

B : Die Bewerberin wird vom Personalleiter endgültig als geeignet beurteilt.

Damit entnimmt man der Aufgabe folgende Wahrscheinlichkeiten.

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= 0,8 \\ P(A \mid B^c) &= 0,05 \\ P(B) &= 0,45 \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Theorems von Bayes errechnet man die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned} P(B \mid A) &= \frac{P(A \mid B) \cdot P(B)}{P(A \mid B) \cdot P(B) + P(A \mid B^c) \cdot P(B^c)} \\ &= \frac{0,8 \cdot 0,45}{0,8 \cdot 0,45 + 0,05 \cdot (1 - 0,45)} \\ &= \frac{0,36}{0,36 + 0,0275} \\ &\approx 0,9290 \end{aligned}$$

Aufgabe 35

Die Zufallsvariable X, die die Anzahl der defekten Kondensatoren angibt, ist in diesem Fall binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p = \frac{10}{100} = 0,1$. Damit berechnet man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

(a)

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{5}{2} \cdot 0,1^2 \cdot (1 - 0,1)^{5-2} \\ &= 10 \cdot 0,01 \cdot 0,729 \\ &= 0,0729 \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) =& 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\
=& 1 - \left[\binom{5}{0} \cdot 0,1^0 \cdot (1 - 0,1)^{5-0} \right. \\
& \left. + \binom{5}{1} \cdot 0,1^1 \cdot (1 - 0,1)^{5-1} \right] \\
=& 1 - [1 \cdot 1 \cdot 0,59049 + 5 \cdot 0,1 \cdot 0,6561] \\
=& 1 - [0,59049 + 0,32805] \\
=& 1 - 0,91854 \\
=& 0,08146
\end{aligned}
$$

Aufgabe 36

(a)

$$
\begin{aligned}
P(\text{„ganz bestimmte Loszahl“}) &= \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}} \\
&= \frac{1}{10^7} \\
&= 0{,}0000001
\end{aligned}
$$

(b) Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl des Auftretens der „2“ an. Es liegt eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 7$ und $p = 0,1$ vor. Man errechnet somit:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) =& P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
=& \binom{7}{0} \cdot 0,1^0 \cdot (1 - 0,1)^{7-0} + \binom{7}{1} \cdot 0,1^1 \cdot (1 - 0,1)^{7-1} \\
& + \binom{7}{2} \cdot 0,1^2 \cdot (1 - 0,1)^{7-2} \\
\approx& 0,4783 + 0,3720 + 0,1240 \\
=& 0,9743
\end{aligned}$$

(c) Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl des Auftretens der „2“ an. Es liegt eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 14$ und $p = 0,1$ vor. Man errechnet somit:

$$P(X = 0) = \binom{14}{0} \cdot 0,1^0 \cdot (1 - 0,1)^{14-0}$$
$$\approx 0,2288$$

Aufgabe 37

Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Frauen in der Auswahl wieder. Somit liegt eine hypergeometrische Verteilung mit $n = 3$, $M = 3$ und $N = 8$ vor. Man berechnet damit:

(a)

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{8-3}{3-3}}{\binom{8}{3}} \\ &= \frac{1 \cdot 1}{56} \\ &= \frac{1}{56} \\ &\approx 0,0179 \end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &= \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{8-3}{3-0}}{\binom{8}{3}} \\
&= \frac{1 \cdot 10}{56} \\
&= \frac{10}{56} \\
&\approx 0,1786
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\
&= \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{8-3}{3-2}}{\binom{8}{3}} + \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{8-3}{3-3}}{\binom{8}{3}} \\
&= \frac{3 \cdot 5}{56} + \frac{1 \cdot 1}{56} \\
&= \frac{15 + 1}{56} \\
&= \frac{16}{56} \\
&= \frac{2}{7} \\
&\approx 0{,}2857
\end{aligned}
$$