Statistik I
WS 2013/2014
Musterlösung 10
Aufgaben 38-41

Aufgabe 38

Sei Z standardnormalverteilt. Dann berechnet man:

(a)

$$\begin{aligned}
P(X \leq 41) &= F_X(41) \\
&= F_Z\left(\frac{41-35}{\sqrt{144}}\right) \\
&= F_Z(0,5) \\
&= 0,6915 \\
P(X \leq 50) &= F_X(50) \\
&= F_Z\left(\frac{50-35}{\sqrt{144}}\right) \\
&= F_Z(1,25) \\
&= 0,8944
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 23) &= F_X(23) \\
&= F_Z\left(\frac{23 - 35}{\sqrt{144}}\right) \\
&= F_Z(-1) \\
&= 1 - F_Z(1) \\
&= 1 - 0,8413 \\
&= 0,1587
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(X > 41) &= 1 - P(X \leq 41) \\
&= 1 - F_X(41) \\
&= 1 - F_Z\left(\frac{41 - 35}{\sqrt{144}}\right) \\
&= 1 - F_Z(0,5) \\
&= 1 - 0,6915 \\
&= 0,3085 \\
P(X > 20) &= 1 - P(X \leq 20) \\
&= 1 - F_X(20) \\
&= 1 - F_Z\left(\frac{20 - 35}{\sqrt{144}}\right) \\
&= 1 - F_Z(-1,25) \\
&= 1 - (1 - F_Z(1,25)) \\
&= F_Z(1,25) \\
&= 0,8944
\end{aligned}
$$

(c)

$$\begin{aligned}
P(23 < X \leq 41) &= F_X(41) - F_X(23) \\
&= F_Z\left(\frac{41-35}{\sqrt{144}}\right) - F_Z\left(\frac{23-35}{\sqrt{144}}\right) \\
&= F_Z(0,5) - F_Z(-1) \\
&= F_Z(0,5) - (1 - F_Z(1)) \\
&= 0,6915 - (1 - 0,8413) \\
&= 0,5328 \\
P(38 < X \leq 50) &= F_X(50) - F_X(38) \\
&= F_Z\left(\frac{50-35}{\sqrt{144}}\right) - F_Z\left(\frac{38-35}{\sqrt{144}}\right) \\
&= F_Z(1,25) - F_Z(0,25) \\
&= 0,8944 - 0,5987 \\
&= 0,2953
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(20 < X \leq 23) &= F_X(23) - F_X(20) \\
&= F_Z\left(\frac{23-35}{\sqrt{144}}\right) - F_Z\left(\frac{20-35}{\sqrt{144}}\right) \\
&= F_Z(-1) - F_Z(-1,25) \\
&= (1 - F_Z(1)) - (1 - F_Z(1,25)) \\
&= (1 - 0,8413) - (1 - 0,8944) \\
&= 0,0531
\end{aligned}
$$

Aufgabe 39

Es ist:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 0,05x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ -0,2x^2 + 2x - 4 & \text{für } 4 < x \leq 5 \\ 1 & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

Da X eine stetige Zufallsvariable ist und $F_X(4) = 0,8$ erhält man die beiden Quantile durch nachfolgende Rechnung (Hinweis: Für die quadratischen Gleichungen existieren jeweils zwei Lösungen, jedoch werden Lösungen außerhalb des zulässigen Bereichs ignoriert).

$$
\begin{aligned}
& & F_X(z_{0,1}) &= 0,1 \\
&\Leftrightarrow & 0,05 z_{0,1}^2 &= 0,1 \\
&\Leftrightarrow & z_{0,1} &= \sqrt{2} \approx 1,4142
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& & F_X(z_{0,95}) &= 0,95 \\
&\Leftrightarrow & -0,2 z_{0,95}^2 + 2 z_{0,95} - 4 &= 0,95 \\
&\Leftrightarrow & -0,2 z_{0,95}^2 + 2 z_{0,95} - 4,95 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & z_{0,95} &= 4,5
\end{aligned}
$$

Aufgabe 40

Mit der Ungleichung von TSCHEBYSCHOW erhält man:

$$\begin{aligned}
P(8 < X < 12) &= P(E(X) - 2 < X < E(X) + 2) \\
&\geq 1 - \frac{Var(X)}{2^2} = 1 - \frac{2}{4} = 0.5 \\
P(5 < X < 15) &= P(E(X) - 5 < X < E(X) + 5) \\
&\geq 1 - \frac{Var(X)}{5^2} = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25} = 0.92 \\
P(X \geq 13 \vee X \leq 7) &= P(X \geq E(X) + 3 \vee X \leq E(X) - 3) \\
&\leq \frac{Var(X)}{3^2} = \frac{2}{9} = 0.222... \\
P(X \geq 18 \vee X \leq 2) &= P(X \geq E(X) + 8 \vee X \leq E(X) - 8) \\
&\leq \frac{Var(X)}{8^2} = \frac{2}{64} = \frac{1}{32} = 0.03125
\end{aligned}$$

Aufgabe 41

Man bestimmt:

$$M'_X(t) = \frac{-2}{(t-1)^3}$$
$$M''_X(t) = \frac{6}{(t-1)^4}$$

Damit berechnet man:

$$E(X) = M'_X(0) = \frac{-2}{(-1)^3} = 2$$
$$E(x^2) = M''_X(0) = \frac{6}{(-1)^4} = 6$$
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6 - 2^2 = 2.$$