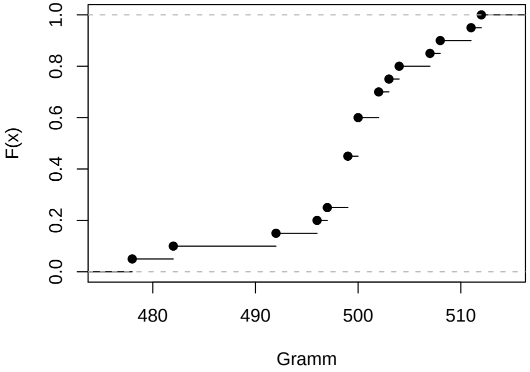
Statistik I
WS 2013/2014
Musterlösung 3
Aufgaben 8-11

Aufgabe 8

i	x_i	n_i	h_i	$H(x_i)$	$\widehat{F}(x_i)$
1	478	1	0,05	1	0,05
2	482	1	0,05	2	0,1
3	492	1	0,05	3	0,15
4	496	1	0,05	4	0,2
5	497	1	0,05	5	0,25
6	499	4	0,2	9	0,45
7	500	3	0,15	12	0,6
8	502	2	0,1	14	0,7
9	503	1	0,05	15	0,75
10	504	1	0,05	16	0,8
11	507	1	0,05	17	0,85
12	508	1	0,05	18	0,9
13	511	1	0,05	19	0,95
14	512	1	0,05	20	1


F(x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
480
490
500
510
Gramm

Aufgabe 9

$$\begin{aligned}
\widehat{m}_{x,1} &= \bar{x} \\
&= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i \\
&= \frac{1}{10}(5+2+7+\ldots+1) \\
&= \frac{1}{10}\cdot 48 \\
&= 4,8
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{m}_{x,2} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 \\
&= \frac{1}{10}(5^2 + 2^2 + 7^2 + \ldots + 1^2) \\
&= \frac{1}{10} \cdot 294 \\
&= 29,4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{m}_{x,3} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^3 \\
&= \frac{1}{10}(5^3 + 2^3 + 7^3 + \ldots + 1^3) \\
&= \frac{1}{10} \cdot 2052 \\
&= 205,2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{m}_{x,4} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^4 \\
&= \frac{1}{10}(5^4 + 2^4 + 7^4 + \ldots + 1^4) \\
&= \frac{1}{10} \cdot 15414 \\
&= 1541,4 \\
\widehat{M}_{x,1} &= 0 \text{ (siehe Lemma 3.6)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{M}_{x,2} &= s_x^2 \\
&= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 \\
&= \left(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) - \bar{x}^2 \\
&= 29,4 - 4,8^2 \\
&= 6,36 \\
\widehat{M}_{x,3} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^3 \\
&= \frac{1}{10}\left((5-4,8)^3 + (2-4,8)^3 + \ldots + (1-4,8)^3\right) \\
&= 3,024
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{M}_{x,4} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^4 \\
&= \frac{1}{10}\Big((5-4,8)^4 + (2-4,8)^4 + \ldots + (1-4,8)^4\Big) \\
&= 73,2912 \\
\widehat{m}_{y,1} &= \bar{y} \\
&= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i \\
&= \frac{1}{10}(99 + 55 + 27 + \ldots + 22) \\
&= \frac{1}{10}\cdot 485 \\
&= 48,5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{m}_{y,2} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^2 \\
&= \frac{1}{10}(99^2 + 55^2 + 27^2 + \ldots + 22^2) \\
&= \frac{1}{10}\cdot 30891 \\
&= 9089,1 \\
\widehat{m}_{y,3} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^3 \\
&= \frac{1}{10}(99^3 + 55^3 + 27^3 + \ldots + 22^3) \\
&= \frac{1}{10}\cdot 2332415 \\
&= 233241,5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{m}_{y,4} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^4 \\
&= \frac{1}{10}(99^4 + 55^4 + 27^4 + \ldots + 22^4) \\
&= \frac{1}{10} \cdot 194731623 \\
&= 19473162,3 \\
\widehat{M}_{y,1} &= 0 \text{ (siehe Lemma 3.6)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{M}_{y,2} &= s_y^2 \\
&= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})^2 \\
&= \left(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^2\right) - \bar{y}^2 \\
&= 3089,1 - 48,5^2 \\
&= 736,85
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{M}_{y,3} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})^3 \\
&= \frac{1}{10}\left((99 - 48,5)^3 + (55 - 48,5)^3 + \ldots + (22 - 48,5)^3\right) \\
&= 11945,7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{M}_{y,4} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})^4 \\
&= \frac{1}{10}\left((99-48,5)^4 + (55-48,5)^4 + \ldots + (22-48,5)^4\right) \\
&= 1223084
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10

Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 9 berechnet man:

$$\begin{aligned}
\gamma_{x,1,M} &= \frac{\widehat{M}_{x,3}}{\left(\widehat{M}_{x,2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{3,024}{6,36^{\frac{3}{2}}} \\
&= 0,1885 \\
\gamma_{x,2} &= \frac{\widehat{M}_{x,4}}{\left(\widehat{M}_{x,2}\right)^{2}} \\
&= \frac{73,2912}{6,36^{2}} \\
&= 1,8119
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{y,1,M} &= \frac{\widehat{M}_{y,3}}{\left(\widehat{M}_{y,2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{11945,7}{736,85^{\frac{3}{2}}} \\
&= 0.5972 \\
\gamma_{y,2} &= \frac{\widehat{M}_{y,4}}{\left(\widehat{M}_{y,2}\right)^{2}} \\
&= \frac{1223084}{736,85^{2}} \\
&= 2,2527
\end{aligned}
$$

Mit diesen Ergebnissen erhält man, dass die beiden Merkmalsausprägungen x_i und y_i (bzw. deren empirischen Verteilung) linkssteil ($\gamma_{1,M} > 0$) und flach ($\gamma_2 < 3$) sind.

Aufgabe 11

(a)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{40}(5,5 + 6,0 + \ldots + 75,8) = \frac{1022}{40} = 25,55$$

(b) Die Klassenbildung ergibt:

Klasse	k	x_k^*	n_k	$\frac{x_k^* + x_{k-1}^*}{2}$	$\bar{x}_k$
	0	5			
über 5 bis 10	1	10	4	7,5	7
über 10 bis 15	2	15	9	12,5	$\frac{119}{9}$
über 15 bis 20	3	20	9	17,5	$\frac{155}{9}$
über 20 bis 30	4	30	8	25	25
über 30 bis 50	5	50	6	40	42
über 50 bis 80	6	80	4	65	67

(b) Die letzte Spalte erhält man dabei durch:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \frac{1}{n_1} \sum_{s=1}^{n_1} x_s \\
&= \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{4} x_s \\
&= \frac{1}{4}(5,5 + 6,0 + 8,0 + 8,5) \\
&= \frac{28}{4} \\
&= 7
\end{aligned}
$$

(b)

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{9}(10,6 + \ldots + 15,0) = \frac{119}{9} = 13,\bar{2}$$
$$\bar{x}_3 = \frac{1}{9}(15,2 + \ldots + 19,4) = \frac{155}{9} = 17,\bar{2}$$
$$\bar{x}_4 = \frac{1}{8}(21,0 + \ldots + 29,1) = \frac{200}{8} = 25$$
$$\bar{x}_5 = \frac{1}{6}(32,0 + \ldots + 49,5) = \frac{252}{6} = 42$$
$$\bar{x}_6 = \frac{1}{4}(52,9 + \ldots + 75,8) = \frac{268}{4} = 67$$

(b) Aus diesen Klassendurchschnitten errechnet man das arithmetische Mittel $\bar{x}$ durch:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} n_k \cdot \bar{x}_k \\
&= \frac{1}{40} \left(4 \cdot 7 + 9 \cdot \frac{119}{9} + 9 \cdot \frac{155}{9} + 8 \cdot 25 + 6 \cdot 42 + 4 \cdot 67 \right) \\
&= \frac{1022}{40} \\
&= 25,55
\end{aligned}$$

(c) Bestimmung einer Näherung $\bar{x}'$ für $\bar{x}$ mit Hilfe der Klassenmitten:

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K} n_k \cdot \frac{x_k^* + x_{k-1}^*}{2} \\ &= \frac{1}{40}(4 \cdot 7,5 + 9 \cdot 12,5 + 9 \cdot 17,5 + 8 \cdot 25 + 6 \cdot 40 + 4 \cdot 64) \\ &= \frac{1000}{40} \\ &= 25\end{aligned}$$

Die Abweichung beider Werte ergibt sich dadurch, dass die Klassenmitten nicht mit den Klassendurchschnitten übereinstimmen. Die Näherung ist hier jedoch relativ gut.

(d) Im Extremfall liegen die Werte innerhalb der Klassen an der Unter- oder Obergrenze der jeweiligen Klasse. Damit ergibt sich die Untergrenze dieses Intervalls für den Fall, dass alle Werte möglichst nahe an der jeweiligen Klassenuntergrenze liegen (Achtung: Untergrenze gehört nicht zur Klasse!) und die Obergrenze für den Fall, dass alle Werte mit der jeweiligen Klassenobergrenze zusammenfallen.

Für die Untergrenze gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_u &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{K} n_k \cdot x^*_{k-1} \\
&= \frac{1}{40}(4 \cdot 5 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 15 + 8 \cdot 20 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 50) \\
&= \frac{785}{40} \\
&= 19{,}625
\end{aligned}$$

(d) Für die Obergrenze gilt:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_o &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K} n_k \cdot x_k^* \\
&= \frac{1}{40}(4 \cdot 10 + 9 \cdot 15 + 9 \cdot 20 + 8 \cdot 30 + 6 \cdot 50 + 4 \cdot 80) \\
&= \frac{1215}{40} \\
&= 30,375
\end{aligned}
$$

Damit erhält man das Intervall $]19,625; 30,375]$ in dem sich das arithmetische Mittel befindet.