Aussagenlogik

1. Gegeben seien folgende Aussagen:

A: 7 ist eine ungerade Zahl
B: $|a+b| < |a| + |b|, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$
C: 2 ist eine Primzahl
D: $|-7| \geq 7$
E: $a + 1 \leq b, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$
F: 3 ist Teiler von 9

Bestimmen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen:

a) $A \wedge B$
b) $A \wedge C$
c) $A \vee E$
d) $E \Rightarrow F$
e) $B \Leftrightarrow E$
f) $B \Leftrightarrow F$
g) $D \Rightarrow E$
h) $\neg B \Leftrightarrow \neg E$

2. Seien A, B, C Aussagen mit folgenden Eigenschaften:

$$A \wedge B \quad \text{ist falsch}$$
$$A \wedge C \quad \text{ist wahr}$$

Welche der Aussagen a) - e) sind als wahr oder falsch zu beurteilen?

a) $\neg A$
b) B
c) $C \wedge \neg B$
d) $A \Rightarrow B$
e) $B \Rightarrow C$

3. Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass die folgende Aussage stets wahr ist:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

4. Weisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel nach, dass eine Kontradiktion vorliegt:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow C)$$

5. Welche der Aussagen a) - e) sind als wahr oder falsch zu beurteilen?

a) Ist eine zusammengesetzte Aussage keine Kontradiktion, ist sie stets eine Tautologie.
b) Folgt eine wahre Aussage aus einer falschen Aussage, ist die zusammengesetzte Aussage stets wahr.
c) $A \Leftrightarrow (\neg(\neg A))$ ist eine Kontradiktion.
d) $\exists x \in \mathbb{N} A(x)$ mit $A(x) = 4x^3 + 4 = 38$.
e) $\forall x \in \{-2, 2\} A(x)$ mit $A(x) = 6x^2 + 17 = 41$.

Vollständige Induktion

6. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die folgenden Gleichungen gelten:

a)

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1)^2 = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(2n-1) \quad n\geq 2, n\in\mathbb{N}$$

b)

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

c)

$$\sum_{i=1}^{n}3i^3 = 3n^3\cdot\frac{(n+1)^2}{4n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

d)

$$\sum_{i=1}^{n}i\cdot(1+i^2) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n^2+n+2)}{4} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Mengenlehre

7. Gegeben seien die Mengen:

$$A = \{a,\, c,\, e,\, g,\, i\}$$
$$B = \{b,\, c,\, d,\, f,\, h\}$$
$$C = \{e,\, f,\, g\}$$
$$D = \{b,\, h,\, j\}$$

a) Bestimmen Sie die Mengen $A \cap D$, $B \cup C$, $A \setminus D$, $(B \cup D) \setminus C$, $(C \cap A) \cup B$ und $(C \cup A) \cap B$.

b) Bestimmen Sie die Grundmenge Ω, wenn gilt:

$$\overline{A \cup B \cup C \cup D} = \{l,\, m\}$$

c) Bestätigen Sie die Gültigkeit der folgenden Regel von de Morgan:

$$\overline{B \cup D} = \overline{B} \cap \overline{D}$$

8. Gegeben seien die Mengen:

$$A = \{1, 10\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 10\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 10\}$$

Berechnen Sie:

a) $A \setminus C$

b) $B \setminus (A \cup C)$

c) $B \cup C$

d) $B \cap C$

9. Gegeben seien die Mengen A und B sowie die Grundmenge Ω, für die gilt:

$$A \backslash B = \{a, c\}$$
$$B \backslash A = \{b, d, f\}$$
$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

a) Skizzieren Sie zu jeder dieser Mengen ein geeignetes Venn-Diagramm.

b) Bestimmen Sie die Mengen $A \cap B$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, A, B und skizzieren Sie zu jeder dieser Mengen ein geeignetes Venn-Diagramm.

10. Seien A, B, C Teilmengen einer Menge Ω. Welche der Aussagen a) - e) sind als richtig oder falsch zu beurteilen?

a) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \overline{B} = A$

b) $A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow B \cap C = \emptyset$

c) $B \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap B \cap C = \emptyset$

d) $A \cap \overline{B} = C \Rightarrow C \subseteq A$

e) $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A}$

Komplexe Zahlen

11. Berechnen Sie:

a) $(-2+\frac{3}{2}\cdot i)+(\frac{5}{3}+\frac{7}{4}\cdot i)$
b) $(-4-\frac{1}{5}\cdot i)-(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\cdot i)$
c) $(2-3\cdot i)\cdot(-1+5\cdot i)$
d) $\frac{5}{1-2\cdot i}$
e) $\frac{5+12\cdot i}{3+2\cdot i}$
f) $(1-i)^2\cdot(1+i)^3$
g) $\frac{(\overline{-2+i})^2}{2\cdot(1+2\cdot i)+2\cdot\frac{\overline{1-i}}{2}+i}$
h) $(3+5\cdot i)\cdot\overline{(-3-2\cdot i)}$
i) $|-2+i|$
j) $|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot i|$

12. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck.

$$\left(\frac{3+2i}{4}\cdot\frac{|\sqrt{27}+3i|}{1-3i}+\frac{\overline{-4+8i}}{8-24i}\right)\cdot\frac{\overline{3i+1}}{2}$$

13. Bestimmen Sie die Lösungen $z\in\mathbb{C}$ der Gleichungen:

a) $z^2+2\cdot z+2=0$
b) $z^2+(1-2\cdot i)\cdot z-(3+i)=0$

14. Skizzieren Sie folgende Punktmengen in der Gaussschen Zahlenebene.

a) $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)\geq 2\}$
b) $\{z\in\mathbb{C}:1\leq\mathrm{Im}(z)\leq 2\wedge 1\leq\mathrm{Re}(z)\leq 2\}$
c) $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 1\}$

15. Gegeben sei die komplexe Zahl

$$z=2+2i$$

in algebraischer Form. Geben Sie z in trigonometrischer und exponentieller Darstellung an.

Surjektivität und Injektivität

16. Gegeben sind die Abbildungen:

a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f_1(x) = \frac{x}{x+1}$

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f_2(x) = 2x - 1$

c) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x \mapsto f_3(x) = 2x - 1$

Welche der Abbildungen f_1, f_2, f_3 ist surjektiv, injektiv, bijektiv?

17. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Begründen Sie kurz Ihre Antworten.

a)
$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_1(x) = (x-5)^2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f_2 &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_2(x) = (x-5)^2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} f_3 &: [5, \infty) \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_3(x) = (x-5)^2 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} f_4 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto f_4(x) = (x-5)^2 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} f_5 &: [5, \infty) \to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto f_5(x) = (x-5)^2 \end{aligned}$$

18. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Begründen Sie kurz Ihre Antworten.

a) $f_1 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit $x \mapsto f_1(x) = e^x$

b) $f_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f_2(x) = \ln(x)$

19. Gegeben sei die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} f &: D \to E \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + x \end{aligned}$$

a) Untersuchen Sie f mit $D = \mathbb{R}$ und $E = [-1, \infty)$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

b) Bestimmen Sie D und E derart, dass f

1. surjektiv, aber nicht injektiv,
2. injektiv, aber nicht surjektiv,
3. bijektiv

ist.

c) Begründen Sie, ob f mit $D = [-\frac{1}{2}, \infty)$ und $E = [-\frac{1}{4}, \infty)$ eine Umkehrfunktion besitzt, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

Matrizen und Vektoren (1)

20. Gegeben seien die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $\|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|, \|\mathbf{c}\|, \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$ und $\|\mathbf{c}-\mathbf{b}\|$.

b) Den Abstand zwischen den Punkten, die durch die Ortsvektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gegeben sind.

c) γ_1 und γ_2, wobei γ_1 der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, γ_2 der von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ eingeschlossene Winkel ist.

21. Folgende Teilmengen M_1, M_2 und M_3 des $\mathbb{R}^2$ seien gegeben:

$$M_1 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, y = |x|\}$$
$$M_2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, y \geq |x|\}$$
$$M_3 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, y \leq |x|\}$$

Skizzieren Sie jede dieser drei Punktmengen und untersuchen Sie sie auf Konvexität. Begründen Sie jeweils Ihr Ergebnis.

22. Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen bzgl. der Addition und bzgl. der skalaren Multiplikation mit einer reellen Zahl abgeschlossen sind und ob es sich um reelle Vektorräume handelt. Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

$$M_1 = \{0\}$$
$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x,y \in \mathbb{R}, x \geq y \right\}$$
$$M_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \middle| x,y \in \mathbb{R}, x \cdot y = 0 \right\}$$
$$M_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

23. Welche der Aussagen a) - e) sind als wahr oder falsch zu beurteilen?

a) Dreiecksmatrizen können symmetrisch sein.

b) Gegeben seien zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$.

c) Nicht jede Teilmenge einer Menge linear abhängiger Vektoren ist linear abhängig.

d) Als Skalarprodukt bezeichnet man die Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix.

e) Zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ heißen orthonormal, wenn $\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a} = 0$ und $||\mathbf{a}|| = ||\mathbf{b}|| = 1$ gilt.

Matrizen und Vektoren (2)

24. Gegeben seien die Matrix **A** und der Spaltenvektor **x**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$

b) $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T$

c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$

d) $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$

e) $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$

25. Gegeben seien die Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bilden Sie die Matrizenprodukte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

26. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

27. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 4 \\ 8 & 12 & 12 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den Rang von **B** und $\mathbf{B}^T$. Ist **B** regulär oder singulär?

b) Sind die Spalten von **B** linear abhängig? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

c) Sind die Spalten von **B** ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

28. Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Prüfen Sie, ob die Matrix **A** orthogonal ist.

b) Bestimmen Sie die zu **A** inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$.

Determinanten

30. Gegeben sei die Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(\mathbf{A}), \det(\mathbf{A}^T), \det(2 \cdot \mathbf{A})$ und $\det(\mathbf{A}^2)$.

31. Gegeben seien drei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\mathbf{A}$ ist regulär mit $\det(\mathbf{A}) = 10$.
ii) Für $\mathbf{B}$ gilt: $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 1$.
iii) Für $\mathbf{C}$ gilt: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ ist singulär, d.h. nicht invertierbar.

Berechnen Sie:

a) $\det(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})$
b) $\det(-\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1})$
c) $\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{C})$
d) $\det(\mathbf{C} + \mathbf{C})$

32. Welche der Aussagen a) - c) sind als wahr oder falsch zu beurteilen?

a) Jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ besitzt eine Determinante.
b) Weist eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht den vollen Rang auf, gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
c) Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Dann gilt $|\det(\mathbf{A}^{-1})| = 1$.

Lineare Gleichungssysteme (1)

33. Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\cdot x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 3\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 5\cdot x_3 & = & 1 \\ 4\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & & & = & 4 \end{array}$$

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem als erweiterte Koeffizientenmatrix dar.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

34. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen?

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem.

c) Geben Sie den zugehörigen Nullraum an.

35. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & a \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie für $a = 3$ und $b = -9$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

b) Für welche Kombinationen von $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen?

36. Gegeben sei ein inhomogenes LGS $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ der Ordnung $m \times n$. Welche der Aussagen a) - e) sind als wahr oder falsch zu beurteilen?

a) Ist $\mathbf{A}$ eine Diagonalmatrix, ist das LGS eindeutig lösbar.

b) Weist das LGS mehr Gleichungen als Unbekannte auf (d.h. gilt $m > n$), kann es nicht eindeutig lösbar sein.

c) Der Nullraum entspricht dem Lösungsraum des homogenen LGS.

d) Es kann $\text{rg}(\mathbf{A}) > \text{rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ gelten.

e) Gilt $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = n$, ist das LGS eindeutig lösbar.

Lineare Gleichungssysteme (2)

37. Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} t & t & -1 \\ 1 & 1 & s \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix},$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die reellen Zahlen s und t, so dass $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}$ gilt.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = (2, 3, -1)^T$.

38. a) Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & k \cdot y & = & 1 \\ k \cdot x & + & y & = & 1 \end{array}$$

unlösbar, eindeutig lösbar bzw. mehrdeutig lösbar? Geben Sie jeweils eine Begründung an.

b) Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal, d.h. es gilt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$, wobei $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix der passenden Ordnung bezeichnet.

39. Welche der Aussagen a) - e) sind als wahr oder falsch zu beurteilen?

a) Jede reguläre Matrix ist invertierbar.

b) Gegeben sei eine invertierbare Matrix $\mathbf{A}$. Dann ist auch $\mathbf{A}^T$ invertierbar und es gilt $(\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$.

c) Gegeben seien zwei invertierbare Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist auch ihr Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ invertierbar.

d) Ist eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, gilt $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = n$.

e) Eine orthogonale Matrix ist nicht zwingend invertierbar.

Eigenwerte und Eigenvektoren

40. Gegeben sei die Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie das Spektrum von $\mathbf{A}$.

b) Geben Sie zu jedem Eigenwert von $\mathbf{A}$ alle Eigenvektoren an.

c) Ist die Matrix $\mathbf{A}$ diagonalisierbar?

41. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{B}$

$$P_{\mathbf{B}}(\lambda) = (5+\lambda)(4+\lambda)(5-\lambda)$$

gilt.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$.

c) Bestimmen Sie zum kleinsten Eigenwert alle zugehörigen Eigenvektoren.

42. Welche der Aussagen a) - e) sind als wahr oder falsch zu beurteilen?

a) Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.

b) Für eine beliebige quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\mathrm{spur}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Dann gilt $a_{ii} = \lambda_i \ \forall i$.

c) Gegeben sei eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ist ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ gleich Null, sind $\mathbf{A}$ selbst und $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}$ singulär, wobei λ einen beliebigen Eigenwert von $\mathbf{A}$ darstellt.

d) Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$ besitzen in der Regel nicht das selbe Spektrum.

e) Gegeben sei eine invertierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann sind alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ nichtnegativ.

Quadratische Formen

43. Gegeben seien die beiden quadratischen Formen:

a) $q(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1^2 - 6 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$

b) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 - 3 \cdot x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_4 - 2 \cdot x_3 \cdot x_1$
$+x_3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3^2 - 3 \cdot x_3 \cdot x_4 + 2 \cdot x_4 \cdot x_1 - 5 \cdot x_4 \cdot x_2 + x_4 \cdot x_3 - 5 \cdot x_4^2$

Ermitteln Sie jeweils die zugehörige symmetrische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$.

44. Gegeben seien die Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ positiv definit bzw. negativ definit?

45. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms ergeben sich zu $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 4$.

a) Geben Sie die charakteristische Gleichung $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$ explizit an.

b) Bestimmen Sie die zu $\mathbf{A}$ gehörige quadratische Form $q(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$.

c) Bestimmen Sie die Definitheitseigenschaft von $\mathbf{A}$ über ihre Hauptunterdeterminanten und über ihre Eigenwerte.

d) Bestimmen Sie die Spur und die Determinante von $\mathbf{A}$ jeweils auf zwei verschiedenen Wegen.