

## Formelsammlung

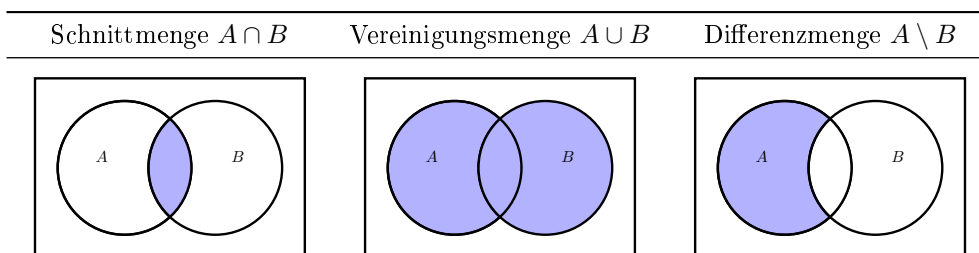
### Aussagenlogik

Für beliebige Aussagen A, B gilt:

Konjunktion		Disjunktion		Implikation		Äquivalenz	
A	w w f f	A	w w f f	A	w w f f	A	w w f f
B	w f w f	B	w f w f	B	w f w f	B	w f w f
$A \wedge B$	w f f f	$A \vee B$	w w w f	$A \Rightarrow B$	w f w w	$A \Leftrightarrow B$	w f f w

### Mengenlehre

Für beliebige Mengen A, B gilt:



### Komplexe Zahlen $\mathbb{C} := \{z : z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}\}$

$i^2 := -1$	$ z  = \sqrt{a^2 + b^2} =: r$
$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$	$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$
$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$
$\bar{z} = a - ib$	$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$	$\overline{z^n} = \bar{z}^n$
$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ für $z_2 \neq 0$	$\bar{\bar{z}} = z$
$Re(z_1) = \frac{1}{2} \cdot (z + \bar{z})$ und $Im(z) = \frac{1}{2i} \cdot (z - \bar{z})$	$z = r \cos(x) + ir \sin(x) = re^{ix}$
$z_1 z_2 = r_1 e^{ix_1} \cdot r_2 e^{ix_2} = r_1 r_2 e^{i(x_1+x_2)}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{ix_1}}{r_2 e^{ix_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(x_1-x_2)}$ für $z_2 \neq 0$
$z^n = (re^{ix})^n = r^n e^{inx}$ für $n \in \mathbb{N}_0$	$e^{ix} = e^{-ix}$

### Abbildungen

Es seien M, N nichtleere Mengen.

$f : M \rightarrow N$

Injektiv	$f(x_1) \neq f(x_2) \forall x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$
Surjektiv	$\forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y$
Bijektiv	injektiv und surjektiv

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Konvex ( $\lambda \in (0, 1)$ )	$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$
Konkav ( $\lambda \in (0, 1)$ )	$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$

Konvexe Menge

$M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt konvex, wenn aus  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in M$  und  $\lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda \mathbf{a}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{a}_2 \in M \forall \lambda \in [0, 1]$  gilt.

## Vektoren ( $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ )

Skalarprodukt	Norm	Abstand	Winkel
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$	$\ \mathbf{x}\  := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	$\ \mathbf{x} - \mathbf{y}\  := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$	$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\ \mathbf{x}\  \cdot \ \mathbf{y}\ }\right)$

### Eigenschaften

des euklidischen Skalarprodukts, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$
der euklidischen Norm, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\ \mathbf{x}\  \geq 0$ $\ \lambda \mathbf{x}\  =  \lambda  \cdot \ \mathbf{x}\ $	$\ \mathbf{x}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\ \mathbf{x} + \mathbf{y}\  \leq \ \mathbf{x}\  + \ \mathbf{y}\ $
Orthogonalität $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$	
Orthonormalität	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \wedge \ \mathbf{x}\  = \ \mathbf{y}\  = 1$	

## Lineare Abbildungen

Es sei  $U$  eine nichtleere Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

<b>Linearer Unterraum</b>	
Vektoraddition	$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$
skalare Multiplikation	$\lambda \mathbf{x} \in U$ für alle $\mathbf{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$
<b>Lineare Abbildung</b> $f : U \rightarrow V$ , $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ lineare Unterräume	
Additivität	$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$
Homogenität	$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$

	einer linearen Abbildung $f : U \rightarrow V$	einer $m \times n$ -Matrix $\mathbf{A}$
<b>Kern</b>	$\text{Kern}(f) := \{\mathbf{x} \in U : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$	$\text{Kern}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
<b>Bild</b>	$\text{Bild}(f) := \{\mathbf{y} \in V : \text{es gibt ein } \mathbf{x} \in U \text{ mit } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}$	$\text{Bild}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \text{es gibt ein } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$
<b>Rang</b>		$\text{rang}(\mathbf{A}) := \dim(\text{Bild}(\mathbf{A}))$

### Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \text{rang}(\mathbf{A}) &= \text{rang}(\mathbf{A}^T) & \text{rang}(\mathbf{A}) &\leq \min\{m, n\} \\ \dim(\text{Kern}(f) + \dim(\text{Bild}(f)) &= \dim(U) & \dim(\text{Kern}(\mathbf{A})) + \text{rang}(\mathbf{A}) &= n \\ \text{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\} &\iff \text{rang}(\mathbf{A}) = n \end{aligned}$$

## Matrizen

Es sei  $\mathbf{A}$  eine quadratische  $n \times n$ -Matrix.

Inverse Matrix	$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$
Symmetrische Matrix	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
Orthogonale Matrix	$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$
Spur	$\text{spur}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$

### Eigenschaften

der Spur	$\text{spur}(\mathbf{E}_n) = n$ $\text{spur}(\mathbf{A}) = \text{spur}(\mathbf{A}^T)$	$\text{spur}(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = \lambda \text{spur}(\mathbf{A}) + \mu \text{spur}(\mathbf{B})$ für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(n, n)$ , $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\text{spur}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{spur}(\mathbf{B}\mathbf{A})$ für $\mathbf{A} \in M(m, n)$ und $\mathbf{B} \in M(n, m)$
inverser Matrizen	$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$	$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ $(r\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{r}\mathbf{A}^{-1}$

### Berechnungsformeln für invertierbare Matrizen

$$\begin{array}{l}
 2 \times 2\text{-Matrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
 n \times n\text{-Matrix}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
 \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{21}^* & \cdots & \mathbf{A}_{n1}^* \\ \mathbf{A}_{12}^* & \mathbf{A}_{22}^* & \cdots & \mathbf{A}_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n}^* & \mathbf{A}_{2n}^* & \cdots & \mathbf{A}_{nn}^* \end{pmatrix}, \\
 \text{wobei } \mathbf{A}_{ij}^* := (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij}) \text{ die Kofaktoren der Matrix } \mathbf{A} \text{ sind.}
 \end{array}
 \right.$$

## Determinanten

Es seien  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  quadratische  $n \times n$ -Matrizen.

### Eigenschaften von Determinanten

$\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$	$\mathbf{A}$ invertierbar $\Rightarrow \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$
$\det(r\mathbf{A}) = r^n \det(\mathbf{A})$	$\mathbf{A}$ orthogonal $\Rightarrow  \det(\mathbf{A})  = 1$
$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$	

### Berechnungsformeln

$$\begin{array}{l}
 n \times n\text{-Matrix} \\
 2 \times 2\text{-Matrix} \\
 3 \times 3\text{-Matrix} \\
 \text{Dreiecksmatrix} \\
 \text{nach Laplace,} \\
 \text{mit Untermatrix } \mathbf{A}_{ij}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \det(\mathbf{A}) := \begin{cases} a_{11} & \text{für } n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\mathbf{A}_{1j}) & \text{für } n > 1 \end{cases} \\
 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
 \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii} \\
 \det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \quad \text{Entwicklung nach Zeile } i \\
 \det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \quad \text{Entwicklung nach Spalte } j
 \end{array}
 \right.$$

## Lineare Gleichungssysteme

Für die Lösungsmenge  $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}x = \mathbf{b}\}$  von  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  der Ordnung  $m \times n$  gilt:

keine Lösung	genau eine Lösung	unendlich viele Lösungen
$\text{rang}(\mathbf{A}) < \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$	$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$	$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) < n$

Cramersche Regel

Es sei  $\mathbf{A}$  eine invertierbare  $n \times n$ -Matrix.

Mit  $A_{(j)} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  ist die eindeutige Lösung  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  von  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$  gegeben durch:

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_{(j)})}{\det(\mathbf{A})} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

## Eigenwerttheorie

Für eine  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}$  heißt eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$ , für die das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}x = \lambda x$$

eine Lösung  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  besitzt, reeller Eigenwert von  $\mathbf{A}$  und der Vektor  $\mathbf{x}$  wird als reeller Eigenvektor von  $\mathbf{A}$  zum Eigenwert  $\lambda$  bezeichnet.

Eigenschaften

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{A} \iff \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  seien Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ , dann gilt:

$\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$  sind Eigenwerte von  $\mathbf{A}^m$

$\mathbf{A}$  invertierbar  $\Leftrightarrow \lambda_i \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$

$\mathbf{A}$  invertierbar  $\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$  Eigenwerte von  $\mathbf{A}^{-1}$

$\mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}^T$  besitzen die gleichen Eigenwerte

$\mathbf{A}$  orthogonal  $\Rightarrow |\lambda_i| = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$

## Diagonalisierbarkeit

Es seien  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  quadratische  $n \times n$ -Matrizen.

Ähnlichkeit	$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ mit invertierbarer $n \times n$ -Matrix $\mathbf{T}$
Eigenschaften	$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{B}}(\lambda)$ $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ $\text{spur}(\mathbf{A}) = \text{spur}(\mathbf{B})$ $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ haben die gleichen Eigenwerte $\mathbf{A}$ invertierbar $\iff \mathbf{B}$ invertierbar $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{B})$
Diagonalisierbarkeit	Es existiert eine invertierbare $n \times n$ -Matrix $\mathbf{X}$ mit $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}$ mit $n \times n$ -Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ .
Kriterien für Diagonalisierbarkeit	$\mathbf{A}$ diagonalisierbar $\iff$ $\mathbf{A}$ besitzt $n$ linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ . Für die Matrix $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ gilt dann $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ . $\mathbf{A}$ besitzt $n$ verschiedene Eigenwerte $\implies$ $\mathbf{A}$ ist diagonalisierbar. $\mathbf{A}$ symmetrisch $\iff$ $\mathbf{A}$ besitzt $n$ normierte orthogonale Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ . Die Matrix $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ist dann orthogonal und es gilt $\mathbf{D} = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ .

## Quadratische Formen

Die zur symmetrischen  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}$  gehörende quadratische Form ist die reellwertige Funktion:

$$q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto q(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij} x_i x_j$$

### Definitheitseigenschaften

Es sei eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}$ .

	Quadratische Form $q(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$	reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$	Hauptminoren $\det(\mathbf{H}_1), \dots, \det(\mathbf{H}_n)$
$\mathbf{A}$ positiv definit	$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$	$\lambda_i > 0 \forall i = 1, \dots, n$	$\det(\mathbf{H}_k) > 0 \forall k = 1, \dots, n$
$\mathbf{A}$ negativ definit	$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$	$\lambda_i < 0 \forall i = 1, \dots, n$	$(-1)^k \det(\mathbf{H}_k) > 0 \forall k = 1, \dots, n$
$\mathbf{A}$ indefinit	$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ und $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} < 0$	es gibt positive und negative Eigenwerte	weder $\det(\mathbf{H}_k) \geq 0$ noch $(-1)^k \det(\mathbf{H}_k) \geq 0 \forall k = 1, \dots, n$