Prof. Dr. Bernhard Arnold, Institut für Statistik und Ökonometrie der Universität Hamburg

Lebensdaueranalyse und Zuverlässigkeit von Systemen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $0<p<1$ den 100p%-Punkt einer nach $W(\eta;\beta)$ verteilten Lebensdauer T ($\eta>0$, $\beta>0$).

Aufgabe 2

Die Lebensdauer einer Wasserpumpe eines Autos sei weibullverteilt mit einer charakteristischen Lebensdauer von 265.000 km und einem Weibull-Anstieg von 1,7.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Wasserpumpe bis zum Ende der Garantiezeit von 36.000 km ausfällt.
b) Geben Sie die zugehörige Hazardfunktion an.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Wasserpumpe in den auf die Garantiezeit folgenden 1.000 km ausfällt, vorausgesetzt, sie war am Ende der Garantiezeit noch intakt.

Aufgabe 3

Die Lebensdauer einer Diode (in Betriebsstunden) sei näherungsweise logarithmisch normalverteilt mit den Parametern $\mu=12{,}3$ und $\sigma=1{,}2$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung dieser Lebensdauerverteilung.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Diode nach 15.000 Betriebsstunden noch intakt ist.
c) Welcher Prozentsatz dieser Dioden ist spätestens nach 50.000 Betriebsstunden ausgefallen?
d) Bestimmen Sie den Median und den 95%-Punkt dieser Lebensdauerverteilung.

Aufgabe 4

Ein elektronischer Schaltkreis besteht aus 10 Siliziumtransistoren, 5 Siliziumdioden, 20 Schichtwiderständen und 11 Keramikkondensatoren. Unter normalen Betriebsbedingungen haben die Bauelemente folgende, von der Zeit unabhängige Ausfallraten (Zeiteinheit: 1 Betriebsstunde):

Transistoren:	$h_1 = 5 \cdot 10^{-7}$;	Dioden:	$h_2 = 10^{-7}$;
Widerstände:	$h_3 = 5 \cdot 10^{-9}$;	Kondensatoren:	$h_4 = 4 \cdot 10^{-7}$

Der Schaltkreis bildet ein zuverlässigkeitstheoretisches Seriensystem. Die Bauelemente sollen unabhängig voneinander arbeiten.

a) Berechnen Sie die Ausfallrate des Systems.
b) Geben Sie die Zuverlässigkeitsfunktion und die mittlere Lebensdauer des Systems an.
c) Geben Sie den spätesten Zeitpunkt an, zu dem das System mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% noch intakt ist.

Aufgabe 5
Ein Parallelsystem besteht aus n unabhängigen Komponenten mit identisch nach Exp(λ) verteilten Lebensdauern. Wie groß muss n mindestens sein, damit das System im Zeitintervall $\left[0;\frac{1}{\lambda}\right]$ höchstens mit Wahrscheinlichkeit 0,05 ausfällt?

Aufgabe 6
Ein Kraftwerk mit fünf unabhängig voneinander arbeitenden identischen Generatoren produziert zufriedenstellend, falls mindestens drei dieser fünf Generatoren intakt sind. Die Lebensdauer eines solchen Generators sei ausreichend genau exponentialverteilt mit $3{,}7 \cdot 10^{-5}$ Ausfällen pro Stunde.
Bestimmen Sie
a) den Erwartungswert der Lebensdauer eines solchen Generators.
b) den Erwartungswert der Lebensdauer des Kraftwerkes.
c) die Wahrscheinlichkeit, dass das Kraftwerk nach 8.760 Stunden noch zufriedenstellend arbeitet.

Aufgabe 7
Ein Reihensystem besteht aus einem Brückensystem (Modul A) sowie aus den beiden parallel geschalteten Modulen B und C, die ihrerseits jeweils aus zwei parallel geschalteten Komponenten bestehen. Die Lebensdauern aller Komponenten seien unabhängig und exponentialverteilt mit den Parametern $\lambda_A = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$, $\lambda_B = 6{,}5 \cdot 10^{-5}$ und $\lambda_C = 4{,}3 \cdot 10^{-5}$ für alle Komponenten in den Modulen A, B bzw. C (Zeiteinheit: 1 Betriebsstunde). Berechnen Sie die Zuverlässigkeit (Intaktwahrscheinlichkeit) dieses Reihensystems nach 5.000 Betriebsstunden.

Aufgabe 8
Bestimmen Sie die Strukturfunktion eines 2-aus-4- und eines 3-aus-4-Systems in Orthogonalform.

Aufgabe 9
Ein Reihensystem besteht aus der Komponente 1 und einem Parallelsystem, bestehend aus den beiden Komponenten 2 und 3. Die Lebensdauer T_i der Komponente i (i=1,2,3) ist exponentialverteilt mit dem Parameter λ_i. Dabei gilt $\lambda_1 = 10^{-4}$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 10^{-3}$ (Zeiteinheit: 1 Betriebsstunde). Alle Komponenten arbeiten voneinander unabhängig.

a) Berechnen Sie die Systemzuverlässigkeit R in Abhängigkeit von den Zuverlässigkeiten R_i der Komponenten i (i=1,2,3).
b) Bestimmen Sie die strukturellen Birnbaum-Importanzen der drei Komponenten.
c) Berechnen Sie die Systemzuverlässigkeit und die Birnbaum-Importanzen der drei Komponenten nach 100, nach 1.000 sowie nach 1.500 Betriebsstunden.

Aufgabe 10

Die Lebensdauer eines elektrischen Bauteiles sei exponentialverteilt. Eine Stichprobe von 15 Bauteilen dieses Typs ergibt folgende Lebensdauern (in Stunden):
88, 105, 141, 344, 430, 516, 937, 1057, 1222, 1230, 1513, 1774, 2408, 2920, 2952 .

a) Bestimmen Sie die ML-Schätzwerte für die erwartete Lebensdauer und die Ausfallrate eines solchen Bauteiles.
b) Geben Sie zur Konfidenzwahrscheinlichkeit von 95% Vertrauensintervalle für die erwartete Lebensdauer und die Ausfallrate eines solchen Bauteiles an.

Aufgabe 11

Bearbeiten Sie Aufgabe 10 für den Fall, dass vor Versuchsbeginn festgelegt wird, lediglich die ersten acht Ausfälle abzuwarten und dann den Versuch sofort abzubrechen.

Aufgabe 12

Aus einer exponentialverteilten Grundgesamtheit werden mit Hilfe einer unabhängigen Zufallsstichprobe Typ II - zensierte Daten erhoben.

a) Zeigen Sie, dass die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für die erwartete Lebensdauer der Grundgesamtheit erwartungstreu ist.
b) Wie lange dauert es durchschnittlich, bis diese Typ II - zensierten Daten erhoben sind?

Aufgabe 13

Die Lebensdauer eines bestimmten Bauteiltyps sei exponentialverteilt. Zwölf dieser Bauteile werden gleichzeitig einer Lebensdauerprüfung unterzogen. Sobald die ersten sieben dieser Bauteile ausgefallen sind, wird die Lebensdauerprüfung abgebrochen. Folgende Lebensdauern (in Stunden) werden gemessen:

31, 58, 157, 185, 300, 470, 497.

Kann man auf Grund dieses Datenmaterials auf einem Signifikanzniveau von 5% schließen, dass die erwartete Lebensdauer dieses Bauteiltyps weniger als 1.000 Stunden beträgt?

Aufgabe 14

Bearbeiten Sie Aufgabe 10 unter der Annahme, dass der Lebensdauerversuch nach 1.100 Stunden abgebrochen wird.

Aufgabe 15

Zehn Exemplare eines Gerätetyps werden einem Lebensdauerversuch unterzogen. Sie werden zu unterschiedlichen Zeitpunkten eines Jahres in Betrieb genommen; der Lebensdauerversuch endet jedoch einheitlich am 31. August desselben Jahres. Es ergeben sich folgende Daten:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Datum der Inbetriebnahme	11.6.	21.6.	22.6.	2.7.	21.7.	31.7.	31.7.	1.8.	2.8.	10.8.
Ausfalldatum	13.6.	-	12.8.	-	23.8.	27.8.	14.8.	25.8.	6.8.	-

Die Lebensdauer dieses Gerätetyps sei exponentialverteilt.

a) Bestimmen Sie zur Vertrauenswahrscheinlichkeit von 99% approximativ ein Konfidenzintervall für die erwartete Lebensdauer dieses Gerätetyps.

b) Kann man unter Zugrundelegung einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% (99%) zumindest approximativ schließen, dass die erwartete Lebensdauer dieses Gerätetyps weniger als 100 Tage beträgt?

Aufgabe 16

Zwei unabhängige Zufallsstichproben mit den Umfängen $n_1=n_2=15$ werden unabhängig voneinander aus zwei exponentialverteilten Grundgesamtheiten gezogen. Bei beiden Stichproben beobachtet man lediglich die zehn kleinsten Werte. Die erste Stichprobe ergibt eine beobachtete Gesamtlebensdauer von 700 Stunden, die zweite eine beobachtete Gesamtlebensdauer von 840 Stunden.

a) Kann man aus diesen Daten auf einem Signifikanzniveau von 5% schließen, dass sich die beiden Grundgesamtheiten unterscheiden?

b) Bestimmen Sie zur Vertrauenswahrscheinlichkeit von 95% ein Konfidenzintervall für den Quotienten aus den erwarteten Lebensdauern der beiden Grundgesamtheiten.

Aufgabe 17

Um zwei exponentialverteilte Grundgesamtheiten miteinander zu vergleichen, werden unabhängig voneinander aus den beiden Grundgesamtheiten je eine unabhängige Zufallsstichprobe vom Umfang $n_1=n_2=20$ gezogen. Beide Datensätze sind zensiert vom Typ I. Der Datensatz aus der ersten Grundgesamtheit enthält genau neun unzensierte Lebensdauern; die beobachtete Gesamtlebensdauer beträgt 630 Stunden. Der Datensatz aus der zweiten Grundgesamtheit enthält ebenfalls genau neun unzensierte Daten; man beobachtet in der Stichprobe aus der zweiten Grundgesamtheit eine Gesamtlebensdauer von 450 Stunden.

a) Kann man auf einem Signifikanzniveau von 10% zumindest näherungsweise schließen, dass sich die beiden Grundgesamtheiten unterscheiden?

b) Bestimmen Sie zur Vertrauenswahrscheinlichkeit von 90% approximativ ein Konfidenzintervall für den Quotienten aus den erwarteten Lebensdauern der beiden Grundgesamtheiten.

Aufgabe 18

Die Lebensdauer eines speziellen Typs eines elektrischen Gerätes sei hinreichend genau exponentialverteilt. Eine große Warenpartie dieses Gerätetyps soll mit einer Wahrscheinlichkeit von lediglich 5% abgelehnt werden, falls die erwartete Lebensdauer dieses Gerätetyps 1.000 Stunden beträgt. Sie soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% abgelehnt werden, falls die erwartete Lebensdauer dieses Gerätetyps höchstens 400 Stunden beträgt.

a) Bestimmen Sie einen Stichprobenplan, der diesen Anforderungen genügt. Beschreiben Sie die konkrete Handlungsanweisung dieses Prüfplanes.
b) Geben Sie die erwartete Dauer des in Teilaufgabe a) beschriebenen Lebensdauerversuchs in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang und in Abhängigkeit von der erwarteten Lebensdauer dieses Gerätetyps an.