

Formelsammlung

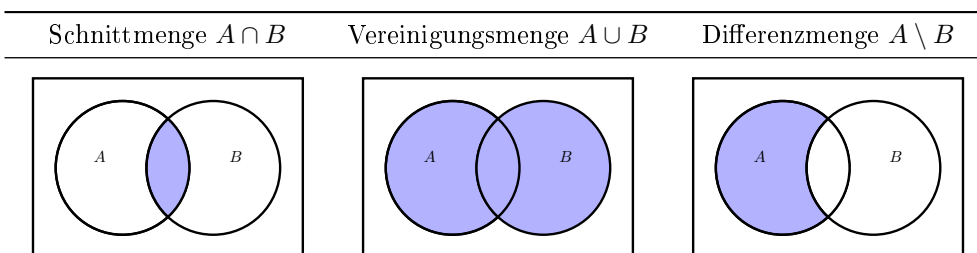
Aussagenlogik

Für beliebige Aussagen A, B gilt:

Konjunktion		Disjunktion		Implikation		Äquivalenz	
A	w w f f	A	w w f f	A	w w f f	A	w w f f
B	w f w f	B	w f w f	B	w f w f	B	w f w f
$A \wedge B$	w f f f	$A \vee B$	w w w f	$A \Rightarrow B$	w f w w	$A \Leftrightarrow B$	w f f w

Mengenlehre

Für beliebige Mengen A, B gilt:



Komplexe Zahlen $\mathbb{C} := \{z : z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}\}$

$i^2 := -1$	$ z = \sqrt{a^2 + b^2} =: r$
$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$	$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$
$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$
$\bar{z} = a - ib$	$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$	$\overline{z^n} = \bar{z}^n$
$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ für $z_2 \neq 0$	$\bar{\bar{z}} = z$
$Re(z_1) = \frac{1}{2} \cdot (z + \bar{z})$ und $Im(z) = \frac{1}{2i} \cdot (z - \bar{z})$	$z = r \cos(x) + ir \sin(x) = re^{ix}$
$z_1 z_2 = r_1 e^{ix_1} \cdot r_2 e^{ix_2} = r_1 r_2 e^{i(x_1+x_2)}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{ix_1}}{r_2 e^{ix_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(x_1-x_2)}$ für $z_2 \neq 0$
$z^n = (re^{ix})^n = r^n e^{inx}$ für $n \in \mathbb{N}_0$	$e^{ix} = e^{-ix}$

Abbildungen

Es seien M, N nichtleere Mengen.

$f : M \rightarrow N$

Injektiv	$f(x_1) \neq f(x_2) \forall x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$
Surjektiv	$\forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y$
Bijektiv	injektiv und surjektiv

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Konvex ($\lambda \in (0, 1)$)	$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$
Konkav ($\lambda \in (0, 1)$)	$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$

Konvexe Menge

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn aus $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in M$ und $\lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda \mathbf{a}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{a}_2 \in M \forall \lambda \in [0, 1]$ gilt.

Vektoren ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$)

Skalarprodukt	Norm	Abstand	Winkel
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$	$\ \mathbf{x}\ := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	$\ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$	$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\ \mathbf{x}\ \cdot \ \mathbf{y}\ }\right)$

Eigenschaften

des euklidischen Skalarprodukts, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$
der euklidischen Norm, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\ \mathbf{x}\ \geq 0$ $\ \lambda \mathbf{x}\ = \lambda \cdot \ \mathbf{x}\ $	$\ \mathbf{x}\ = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\ \mathbf{x} + \mathbf{y}\ \leq \ \mathbf{x}\ + \ \mathbf{y}\ $
Orthogonalität $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$	
Orthonormalität	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \wedge \ \mathbf{x}\ = \ \mathbf{y}\ = 1$	

Lineare Abbildungen

Es sei U eine nichtleere Teilmenge des \mathbb{R}^n .

Linearer Unterraum	
Vektoraddition	$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$
skalare Multiplikation	$\lambda \mathbf{x} \in U$ für alle $\mathbf{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$
Lineare Abbildung $f : U \rightarrow V$, $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ lineare Unterräume	
Additivität	$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$
Homogenität	$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$

	einer linearen Abbildung $f : U \rightarrow V$	einer $m \times n$ -Matrix \mathbf{A}
Kern	$\text{Kern}(f) := \{\mathbf{x} \in U : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$	$\text{Kern}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
Bild	$\text{Bild}(f) := \{\mathbf{y} \in V : \text{es gibt ein } \mathbf{x} \in U \text{ mit } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}$	$\text{Bild}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \text{es gibt ein } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$
Rang		$\text{rang}(\mathbf{A}) := \dim(\text{Bild}(\mathbf{A}))$

Zusammenhänge

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}^T)$$

$$\text{rang}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$$

$$\dim(\text{Kern}(f) + \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(U)$$

$$\dim(\text{Kern}(\mathbf{A})) + \text{rang}(\mathbf{A}) = n$$

$$\text{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\} \iff \text{rang}(\mathbf{A}) = n$$

Matrizen

Es sei \mathbf{A} eine quadratische $n \times n$ -Matrix.

Inverse Matrix	$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$
Symmetrische Matrix	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
Orthogonale Matrix	$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$
Spur	$\text{spur}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Eigenschaften

der Spur	$\text{spur}(\mathbf{E}_n) = n$ $\text{spur}(\mathbf{A}) = \text{spur}(\mathbf{A}^T)$	$\text{spur}(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = \lambda \text{spur}(\mathbf{A}) + \mu \text{spur}(\mathbf{B})$ für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(n, n), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\text{spur}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{spur}(\mathbf{B}\mathbf{A})$ für $\mathbf{A} \in M(m, n)$ und $\mathbf{B} \in M(n, m)$
inverser Matrizen	$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$	$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ $(r\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{r}\mathbf{A}^{-1}$

Berechnungsformeln für invertierbare Matrizen

$$\begin{array}{l}
 2 \times 2\text{-Matrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
 n \times n\text{-Matrix}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
 \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{21}^* & \cdots & \mathbf{A}_{n1}^* \\ \mathbf{A}_{12}^* & \mathbf{A}_{22}^* & \cdots & \mathbf{A}_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n}^* & \mathbf{A}_{2n}^* & \cdots & \mathbf{A}_{nn}^* \end{pmatrix},
 \end{array} \right.$$

wobei $\mathbf{A}_{ij}^* := (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$ die Kofaktoren der Matrix \mathbf{A} sind.

Determinanten

Es seien \mathbf{A}, \mathbf{B} quadratische $n \times n$ -Matrizen.

Eigenschaften von Determinanten

$\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$	\mathbf{A} invertierbar $\Rightarrow \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$
$\det(r\mathbf{A}) = r^n \det(\mathbf{A})$	\mathbf{A} orthogonal $\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 1$
$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$	

Berechnungsformeln

$$\begin{array}{l}
 n \times n\text{-Matrix} \\
 2 \times 2\text{-Matrix} \\
 3 \times 3\text{-Matrix} \\
 \text{Dreiecksmatrix} \\
 \text{nach Laplace,} \\
 \text{mit Untermatrix } \mathbf{A}_{ij}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \det(\mathbf{A}) := \begin{cases} a_{11} & \text{für } n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\mathbf{A}_{1j}) & \text{für } n > 1 \end{cases} \\
 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
 \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii} \\
 \det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \quad \text{Entwicklung nach Zeile } i \\
 \det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \quad \text{Entwicklung nach Spalte } j
 \end{array} \right.$$

Lineare Gleichungssysteme

Für die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}x = \mathbf{b}\}$ von $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ der Ordnung $m \times n$ gilt:

keine Lösung	genau eine Lösung	unendlich viele Lösungen
$\text{rang}(\mathbf{A}) < \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$	$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$	$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) < n$

Cramersche Regel

Es sei \mathbf{A} eine invertierbare $n \times n$ -Matrix.

Mit $A_{(j)} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ist die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ von $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ gegeben durch:

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_{(j)})}{\det(\mathbf{A})} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

Eigenwerttheorie

Für eine $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} heißt eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}x = \lambda x$$

eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ besitzt, reeller Eigenwert von \mathbf{A} und der Vektor x wird als reeller Eigenvektor von \mathbf{A} zum Eigenwert λ bezeichnet.

Eigenschaften

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{A} \iff \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ seien Eigenwerte von \mathbf{A} , dann gilt:

$\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$ sind Eigenwerte von \mathbf{A}^m

\mathbf{A} invertierbar $\iff \lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$

\mathbf{A} invertierbar $\implies \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ Eigenwerte von \mathbf{A}^{-1}

\mathbf{A} und \mathbf{A}^T besitzen die gleichen Eigenwerte

\mathbf{A} orthogonal $\implies |\lambda_i| = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$

Diagonalisierbarkeit

Es seien \mathbf{A} , \mathbf{B} quadratische $n \times n$ -Matrizen.

Ähnlichkeit	$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ mit invertierbarer $n \times n$ -Matrix \mathbf{T}
Eigenschaften	$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{B}}(\lambda)$ $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ $\text{spur}(\mathbf{A}) = \text{spur}(\mathbf{B})$ \mathbf{A} und \mathbf{B} haben die gleichen Eigenwerte \mathbf{A} invertierbar $\iff \mathbf{B}$ invertierbar $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{B})$
Diagonalisierbarkeit	Es existiert eine invertierbare $n \times n$ -Matrix \mathbf{X} mit $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}$ mit $n \times n$ -Diagonalmatrix \mathbf{D} .
Kriterien für Diagonalisierbarkeit	\mathbf{A} diagonalisierbar \iff \mathbf{A} besitzt n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Für die Matrix $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ gilt dann $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$. \mathbf{A} besitzt n verschiedene Eigenwerte \implies \mathbf{A} ist diagonalisierbar. \mathbf{A} symmetrisch \iff \mathbf{A} besitzt n normierte orthogonale Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Die Matrix $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ist dann orthogonal und es gilt $\mathbf{D} = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$.

Quadratische Formen

Die zur symmetrischen $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} gehörende quadratische Form ist die reellwertige Funktion:

$$q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto q(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij} x_i x_j$$

Definitheitseigenschaften

Es sei eine symmetrische $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} .

	Quadratische Form $q(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$	reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$	Hauptminoren $\det(\mathbf{H}_1), \dots, \det(\mathbf{H}_n)$
\mathbf{A} positiv definit	$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$	$\lambda_i > 0 \forall i = 1, \dots, n$	$\det(\mathbf{H}_k) > 0 \forall k = 1, \dots, n$
\mathbf{A} negativ definit	$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$	$\lambda_i < 0 \forall i = 1, \dots, n$	$(-1)^k \det(\mathbf{H}_k) > 0 \forall k = 1, \dots, n$
\mathbf{A} indefinit	$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ und $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} < 0$	es gibt positive und negative Eigenwerte	weder $\det(\mathbf{H}_k) \geq 0$ noch $(-1)^k \det(\mathbf{H}_k) \geq 0 \forall k = 1, \dots, n$