

Vorkurs Mathematik

Wintersemester 2016/2017

Übungsaufgaben

*Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Mathematik
und Statistik in den Wirtschaftswissenschaften*



GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

Kapitel 2

Essentials

6 Übungsaufgaben

- 1) Geben Sie die folgenden Mengen in einer jeweils anderen Darstellung (Aufzählende Darstellung oder Intervalldarstellung, ggf. beschreibende Darstellung) an. Hierbei gelte $x \in \mathbb{Z}$.

$$M_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$M_2 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$M_3 = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$M_4 = (6, 13]$$

$$M_5 =]2, 5[$$

$$M_6 = \emptyset$$

$$M_7 =]1, 9]$$

- 2) Ordnen Sie die folgenden Zahlen den Zahlenmengen zu, in denen sie enthalten sind.

$$2 \quad \sqrt{3} \quad \frac{15}{3} \quad -7 \quad 4, \bar{6} \quad 4i \quad \sqrt{256} \quad 0,6 \quad 0$$

3) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{a, c, e, g, i\}$$

$$B = \{b, c, d, f, h\}$$

$$C = \{e, f, g\}$$

$$D = \{b, h, j\}$$

Bestimmen Sie:

a) $A \cap D$

b) $B \cup C$

c) $A \setminus D$

d) $(B \cup D) \setminus C$

e) $(C \cap A) \cup B$

f) $(C \cup A) \cap B$

Fertigen Sie zudem ein geeignetes Venn-Diagramm an, aus dem alle betrachteten Mengen und ihre Elemente hervorgehen.

4) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A \cap \Omega = \{a\}$$

$$B \cap D = \{c\}$$

$$D \cup C = \{c, d, e\}$$

$$B \setminus D = \{b\}$$

$$\overline{C} = \{a, b, c, d, f\}$$

- Bestimmen Sie die Grundmenge Ω sowie ihre Teilmengen A, B, C, D unter der zusätzlichen Bedingung $D \cap \overline{B} = \{d\}$.
- Bestimmen Sie die Grundmenge Ω sowie ihre Teilmengen A, B, C, D unter der zusätzlichen Bedingung $D \cap \overline{B} = \{d, e\}$.
- Skizzieren Sie zu a) und zu b) jeweils ein geeignetes Venn-Diagramm, aus dem alle betrachteten Mengen und ihre jeweiligen Elemente hervorgehen.
- Wie bezeichnet man die Menge C in Bezug auf die Menge D in Aufgabenteil a) bzw. b)? Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

6 Übungsaufgaben

5) Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus und berechnen Sie sie so weit wie möglich.

a) $(4 + 2) \cdot (3 + 6)$

b) $(12 - 3) \cdot (7 - 1) \cdot 5$

c) $(7 - 3 + 10) \cdot (14 + 3) \cdot (4 - 2)$

d) $(2x + 3y) \cdot (7x + y)$

6) Klammern Sie in den folgenden Ausdrücken gemeinsame Faktoren aus.

a) $36 + 72 + 144 + 288$

b) $21 + 9 + 315 - 42$

c) $-13 - 156 + 273$

7) Berechnen Sie:

a) $4 + 2 \cdot 3 - 10 \cdot 3/6 + (4 - (3 + 11))$

b) $(10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} - 3) \cdot (-(4/2 - 3)) \cdot 10$

c) $-(-(7 + 4 \cdot (3 - 2 \cdot (4 + 7))))$

6 Übungsaufgaben

8) Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke unter Verwendung der Binomischen Formeln und des Pascalschen Dreiecks aus.

a) $(3a - 5b)^2$

b) $(14x + y)^2$

c) $(8x - 3y) \cdot (3y + 8x)$

d) $(9x + 4y)^3$

e) $(2a - 8b)^3$

f) $(8x - 3y)^2 \cdot (3y + 8x)^2$

9) Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke in Linearfaktoren.

a) $x^2 - 6x - 27$

b) $x^2 - 24x + 144$

c) $x^2 - 1$

d) $x^2 + x - 20$

e) $x^2 - 9x + 8$

f) $x^2 + 14x + 49$

g) $x^2 + 13x + 42$

6 Übungsaufgaben

10) Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

a) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$

b) $(3x^3 - 10x^2 + 7x - 12) : (x - 3)$

11) Berechnen Sie:

a)

$$\frac{6}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7} \right)$$

b)

$$\frac{7}{6} + \frac{2}{3} - \frac{10}{12}$$

c)

$$4 \cdot \frac{10}{9} - 2 + \frac{15}{27} - \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{4}$$

d)

$$\frac{11}{13} \cdot \frac{4}{7} : \frac{4}{3} - \left(-\frac{58}{91} \right)$$

12) Fassen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich zusammen:

a)

$$\frac{a}{a+b} - 1$$

b)

$$\frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} - \frac{2a \cdot (x-b)}{a^2 - b^2}$$

c)

$$\frac{v}{1 - \frac{1}{v}} - \frac{1}{v-1}$$

d)

$$\frac{1 + \frac{a}{b}}{1 + \frac{b}{a}}$$

6 Übungsaufgaben

13) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(7^2)^4$

b) $\left(\frac{8^3}{2^3}\right)^2$

c) -12^{-3}

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}}$

e) $\sqrt[7]{6^3}$

f) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}}$

14) Schreiben Sie die folgenden Terme in Wurzel- bzw. Potenzform um:

a) $x^{\frac{2}{3}}$

b) $a^{-\frac{3}{4}}$

c) $(a + b^2)^{-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[7]{x^3}$

e) $(\sqrt[4]{2a})^3$

f) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{y}}$

6 Übungsaufgaben

15) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\log_6 5$

b) $\log_3 4 + \log_3 8$

c) $\log_2 4 - \log_2 5$

d) $\log_7 (3^6)$

16) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $|-10 - 13 + 15|$

b) $\sum_{i=5}^7 (4i^3 - 4i)$

c) $\prod_{i=1}^5 11i^2$

d) $\prod_{i=2}^4 (i + 6i^2)$

e) $5! - 3!$

6 Übungsaufgaben

17) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(30x^4y^7) : (5x^2y^5)$

b) $((16ab)^3) : ((4ab)^3)$

c) $(3xy^2 - 5y^{b+2})^2$

d) $(-2x^4 + ax^3 + 3a^2x^2 + 4x^2 - ax - 2) : (x^2 + ax - 1)$

e) $\frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{7}{12} + \frac{1}{8} + \frac{5}{6} + \frac{2}{9} + \frac{5}{18} + \frac{11}{24} - \frac{1}{12}$

f) $\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt{a} \cdot a \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[8]{a^5} \cdot \sqrt[24]{a^{19}}$

g) $\frac{3 \cdot \sum_{i=1}^3 3x}{\prod_{i=1}^3 3x}$

Kapitel 3

Gleichungen und Ungleichungen

6 Übungsaufgaben

18) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungen, sofern möglich.

a) $11x - 7 = 4$

b) $3x + 9 - 2x + 6x = 4x - 7 + 4$

c) $8x - 2 - 2x + x \cdot (3 - 5) = 11x - 3 - 7x + 1$

d) $-(7 + 4x) - (3x + 2) = 2x \cdot (5 - 2) - 13x - 10$

19) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen jeweils nach allen vier Verfahren, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben.

a) $x^2 - x = 12$

b) $x^2 + 11x + 10 = -14$

20) Berechnen Sie die Diskriminante und die Lösungen der folgenden Gleichung.

$$x^2 + x + \frac{5}{4} = 0$$

6 Übungsaufgaben

21) Lösen Sie die folgenden kubischen Gleichungen.

a) $7x^3 - 7x = 0$

b) $x^3 + 6x^2 + 12x = -8$

c) $x^3 + 3x^2 - 3x = 14$

22) Lösen Sie die folgenden speziellen Gleichungen.

a) $\frac{2x + 8}{2x - 4} = \frac{7x + 4}{4x - 2}$

b) $\sqrt{7x + 1} - 3 = 5$

c) $5^x \cdot 25^{2x-1} = 625$

d) $\ln x = \ln 4 - \ln 3$

23) Lösen Sie die folgenden Ungleichungen.

a) $7x + 14 < 4 - 8x$

b) $-12x - 3 \leq 4x - 5$

c) $-4x^2 \geq -16$

6 Übungsaufgaben

- 24) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem nach allen drei Ihnen aus der Vorlesung bekannten Verfahren.

$$8x + 4y = 2$$

$$12x - 2y = 7$$

- 25) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$x - y + z = 2$$

$$3x - 2y + 2z = 5$$

$$-3x + 3y + 5z = 18$$

Kapitel 4

Differentialrechnung in \mathbb{R}

- 26) Stellen Sie für die folgenden Funktionen jeweils eine geeignete Wertetabelle auf und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

$$f_1(x) = 4x$$

$$f_2(x) = 6x^2 - x$$

$$f_3(x) = x^5$$

$$f_4(x) = \frac{1}{4x}$$

$$f_5(x) = \sqrt{x}$$

$$f_6(x) = x^e$$

$$f_7(x) = 2^x$$

$$f_8(x) = \ln(x)$$

- 27) Rechnen Sie das gegebene Maß in das jeweilige andere Maß um.
- a) $\alpha = 90^\circ$
 - b) $\alpha = 120^\circ$
 - c) $x = \frac{\pi}{6}$
 - d) $x = 2\pi$
- 28) Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Funktion mit den folgenden Eigenschaften.
- a) monoton wachsend, (streng) konkav, unbeschränkt
 - b) nicht monoton, teils streng konvex, teils streng konkav, unbeschränkt, zwei Extrema, ein Wendepunkt
 - c) monoton fallend, erst streng konvex, dann streng konkav, punktsymmetrisch, unbeschränkt, keine Extrema, ein Terrassenpunkt
 - d) gleichzeitig monoton wachsend und fallend, gleichzeitig konvex und konkav, achsensymmetrisch

29) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{2^{x-2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^4 + x^3 - x + 4}{x^4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10x^3}{x^4} \cdot \frac{2x}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} \right)$$

30) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \leq 1 \\ ax^2 + \frac{1}{3} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

eine an der Stelle $x = 1$ stetige Funktion darstellt.

31) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{für } x \leq -1 \\ -x^2 - 4x - 1 & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ x^3 - 3bx + c & \text{für } x > 1 \end{cases} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Parameter a , b und c so, dass f eine stetige und differenzierbare Funktion darstellt.

- 32) Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$f_1(x) = 13x^4 + 5x^2 - 3$$

$$f_2(x) = \sqrt{x} - 14x^3 + \ln(x^2)$$

$$f_3(x) = \frac{4}{x} \cdot e^{5x}$$

$$f_4(x) = (3 - 2 \ln x)^4$$

$$f_5(x) = \ln(x^2 + \sin(2x))$$

$$f_6(x) = \frac{\sqrt{20x}}{e^x}$$

$$f_7(x) = 7^x \cdot \ln(7^x)$$

$$f_8(x) = \log_4(x) \cdot \ln(4)$$

$$f_9(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

- 33) Berechnen Sie jeweils die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen.

$$f_1(x) = 6x^3 + 2x^2 - 4x - 7$$

$$f_2(x) = \sin(x)$$

$$f_3(x) = e^{x^3}$$

$$f_4(x) = \sqrt{16x}$$

$$f_5(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$$

- 34) Führen Sie an den folgenden Funktionen jeweils eine umfassende Kurvendiskussion durch, die alle acht in Kapitel 4.5 erläuterten Punkte abhandelt. Skizzieren Sie anschließend den Graphen der Funktionen.

$$f_1(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$f_2(x) = x \cdot \ln(x)$$

Kapitel 5

Integralrechnung in \mathbb{R}

35) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

$$\int (6x^2 - 4x + 3) \, dx$$

$$\int -\sin(x) \, dx$$

$$\int 10u^{-1} \, du$$

$$\int e^{2z} \, dz$$

$$\int (\ln(5) \cdot x)^{-1} \, dx$$

$$\int \ln(3) \cdot 3^x \, dx$$

$$\int \sqrt{t} \, dt$$

36) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

$$\int_1^3 \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(x) dx$$

$$\int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \right) dx$$

$$\int_4^4 \sqrt[7]{7x} dx$$

$$\int_2^3 \frac{2}{(x+1)^2} dx$$

$$\int_0^4 f(x) dx \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{für } x < 2 \\ 4x-2 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

- 37) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 4$$

und der x -Achse innerhalb des Integrationsintervalls $[0, 1]$.

- 38) Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Funktionen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

eingeschlossen wird.

39) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{(|x| + 4)^2} dx$$

40) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int_0^1 2x \cdot e^x \, dx$$

$$\int \frac{1}{4} x^2 \cdot \exp\left(\frac{1}{12} x^3\right) \, dx$$

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} \, dx$$

$$\int (1 + x^2) \cdot e^{-x} \, dx$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{2}{x}} \, dx$$