

## Formelsammlung

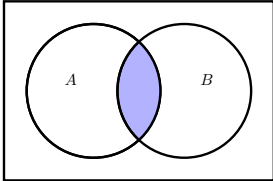
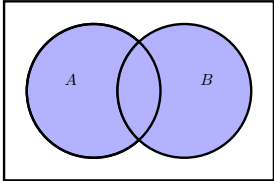
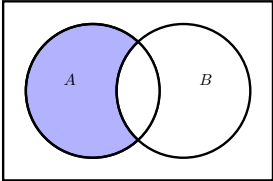
### Aussagenlogik

Für beliebige Aussagen A, B gilt:

| Konjunktion  |   |   |   | Disjunktion |            |   |   | Implikation |   |                   |   | Äquivalenz |   |   |  |
|--------------|---|---|---|-------------|------------|---|---|-------------|---|-------------------|---|------------|---|---|--|
| A            | w | w | f | f           | A          | w | w | f           | f | A                 | w | w          | f | f |  |
| B            | w | f | w | f           | B          | w | f | w           | f | B                 | w | f          | w | f |  |
| $A \wedge B$ | w | f | f | f           | $A \vee B$ | w | w | w           | f | $A \Rightarrow B$ | w | f          | w | w |  |
|              |   |   |   |             |            |   |   |             |   |                   |   |            |   |   |  |

### Mengenlehre

Für beliebige Mengen A, B gilt:

| Schnittmenge $A \cap B$                                                           | Vereinigungsmenge $A \cup B$                                                      | Differenzmenge $A \setminus B$                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |

### Komplexe Zahlen $\mathbb{C} := \{z : z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}\}$

|                                                                                            |                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $i^2 := -1$                                                                                | $ z  = \sqrt{a^2 + b^2} =: r$                                                                           |
| $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$                                     | $z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$                                                  |
| $z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$                                | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$                  |
| $\bar{z} = a - ib$                                                                         | $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$       |
| $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$                                     | $\overline{z^n} = \bar{z}^n$                                                                            |
| $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ für $z_2 \neq 0$              | $\overline{\bar{z}} = z$                                                                                |
| $Re(z_1) = \frac{1}{2} \cdot (z + \bar{z})$ und $Im(z) = \frac{1}{2i} \cdot (z - \bar{z})$ | $z = r \cos(x) + ir \sin(x) = re^{ix}$                                                                  |
| $z_1 z_2 = r_1 e^{ix_1} \cdot r_2 e^{ix_2} = r_1 r_2 e^{i(x_1+x_2)}$                       | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{ix_1}}{r_2 e^{ix_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(x_1-x_2)}$ für $z_2 \neq 0$ |
| $z^n = (re^{ix})^n = r^n e^{inx}$ für $n \in \mathbb{N}_0$                                 | $\frac{z_2}{e^{ix}} = e^{-ix}$                                                                          |

### Abbildungen

Es seien M, N nichtleere Mengen.

$f : M \rightarrow N$

|           |                                                                             |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Injektiv  | $f(x_1) \neq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in M \text{ mit } x_1 \neq x_2$ |
| Surjektiv | $\forall y \in N \quad \exists x \in M : f(x) = y$                          |
| Bijektiv  | injektiv und surjektiv                                                      |

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$

|                                 |                                                                                                                                      |
|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Konvex ( $\lambda \in (0, 1)$ ) | $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D \text{ mit } x_1 \neq x_2$ |
| Konkav ( $\lambda \in (0, 1)$ ) | $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D \text{ mit } x_1 \neq x_2$ |

Konvexe Menge

$M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt konvex, wenn aus  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in M$  und  $\lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda \mathbf{a}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{a}_2 \in M \quad \forall \lambda \in [0, 1]$  gilt.

## Vektoren ( $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ )

| Skalarprodukt                                                    | Norm                                          | Abstand                                                            | Winkel                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ | $\ \mathbf{x}\  := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ | $\ \mathbf{x} - \mathbf{y}\  := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ | $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\ \mathbf{x}\  \cdot \ \mathbf{y}\ }\right)$ |

### Eigenschaften

|                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| des euklidischen Skalarprodukts,<br>$\lambda \in \mathbb{R}$ | $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$<br>$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$<br>$\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ | $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$<br>$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$<br>$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ |
| der euklidischen Norm,<br>$\lambda \in \mathbb{R}$           | $\ \mathbf{x}\  \geq 0$<br>$\ \lambda \mathbf{x}\  =  \lambda  \cdot \ \mathbf{x}\ $                                                                                                                                                                                                       | $\ \mathbf{x}\  = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$<br>$\ \mathbf{x} + \mathbf{y}\  \leq \ \mathbf{x}\  + \ \mathbf{y}\ $                                                                                                                                                                                                                                     |
| Orthogonalität $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$                 | $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Orthonormalität                                              | $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \wedge \ \mathbf{x}\  = \ \mathbf{y}\  = 1$                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |

## Lineare Abbildungen

Es sei  $U$  eine nichtleere Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

|                                                                                                                             |                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Linearer Unterraum</b>                                                                                                   |                                                                                                      |
| Vektoraddition                                                                                                              | $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$                              |
| skalare Multiplikation                                                                                                      | $\lambda \mathbf{x} \in U$ für alle $\mathbf{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$                       |
| <b>Lineare Abbildung</b> $f : U \rightarrow V$ ,<br>$U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ lineare Unterräume |                                                                                                      |
| Additivität                                                                                                                 | $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ |
| Homogenität                                                                                                                 | $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$  |

|             | einer linearen Abbildung $f : U \rightarrow V$                                                                          | einer $m \times n$ -Matrix $\mathbf{A}$                                                                                                                       |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Kern</b> | $\text{Kern}(f) := \{\mathbf{x} \in U : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$                                                   | $\text{Kern}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$                                                              |
| <b>Bild</b> | $\text{Bild}(f) := \{\mathbf{y} \in V : \text{es gibt ein } \mathbf{x} \in U \text{ mit } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}$ | $\text{Bild}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \text{es gibt ein } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$ |
| <b>Rang</b> |                                                                                                                         | $\text{rang}(\mathbf{A}) := \dim(\text{Bild}(\mathbf{A}))$                                                                                                    |

### Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
 \text{rang}(\mathbf{A}) &= \text{rang}(\mathbf{A}^T) & \text{rang}(\mathbf{A}) &\leq \min\{m, n\} \\
 \dim(\text{Kern}(f) + \dim(\text{Bild}(f)) &= \dim(U) & \dim(\text{Kern}(\mathbf{A})) + \text{rang}(\mathbf{A}) &= n \\
 \text{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\} &\iff \text{rang}(\mathbf{A}) = n
 \end{aligned}$$

## Matrizen

Es sei  $\mathbf{A}$  eine quadratische  $n \times n$ -Matrix.

|                     |                                                                |
|---------------------|----------------------------------------------------------------|
| Inverse Matrix      | $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$                       |
| Symmetrische Matrix | $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$                                    |
| Orthogonale Matrix  | $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$ |
| Spur                | $\text{spur}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$               |

### Eigenschaften

|                   |                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| der Spur          | $\text{spur}(\mathbf{E}_n) = n$<br>$\text{spur}(\mathbf{A}) = \text{spur}(\mathbf{A}^T)$       | $\text{spur}(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = \lambda \text{spur}(\mathbf{A}) + \mu \text{spur}(\mathbf{B})$ für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(n, n)$ , $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$<br>$\text{spur}(\mathbf{AB}) = \text{spur}(\mathbf{BA})$ für $\mathbf{A} \in M(m, n)$ und $\mathbf{B} \in M(n, m)$ |
| inverser Matrizen | $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$<br>$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ | $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$<br>$(r\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{r}\mathbf{A}^{-1}$                                                                                                                                                                                                             |

### Berechnungsformeln für invertierbare Matrizen

$$\begin{array}{l}
 2 \times 2\text{-Matrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \left| \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right. \\
 \\
 n \times n\text{-Matrix} \quad \left| \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{21}^* & \cdots & \mathbf{A}_{n1}^* \\ \mathbf{A}_{12}^* & \mathbf{A}_{22}^* & \cdots & \mathbf{A}_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n}^* & \mathbf{A}_{2n}^* & \cdots & \mathbf{A}_{nn}^* \end{pmatrix}, \right. \\
 \left. \text{wobei } \mathbf{A}_{ij}^* := (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij}) \text{ die Kofaktoren der Matrix } \mathbf{A} \text{ sind.} \right.
 \end{array}$$

## Determinanten

Es seien  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  quadratische  $n \times n$ -Matrizen.

### Eigenschaften von Determinanten

|                                                         |                                                                                            |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ | $\mathbf{A}$ invertierbar $\Rightarrow \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$ |
| $\det(r\mathbf{A}) = r^n \det(\mathbf{A})$              | $\mathbf{A}$ orthogonal $\Rightarrow  \det(\mathbf{A})  = 1$                               |
| $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$                 |                                                                                            |

### Berechnungsformeln

$$\begin{array}{l}
 n \times n\text{-Matrix} \quad \left| \quad \det(\mathbf{A}) := \begin{cases} a_{11} & \text{für } n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\mathbf{A}_{1j}) & \text{für } n > 1 \end{cases} \right. \\
 \\
 2 \times 2\text{-Matrix} \quad \left| \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \right. \\
 \\
 3 \times 3\text{-Matrix} \quad \left| \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right. \\
 \left. = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \right. \\
 \\
 \text{Dreiecksmatrix} \quad \left| \quad \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii} \right. \\
 \\
 \text{nach Laplace,} \quad \left| \quad \det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \right. \quad \text{Entwicklung nach Zeile } i \\
 \text{mit Untermatrix } \mathbf{A}_{ij} \quad \left| \quad \det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \right. \quad \text{Entwicklung nach Spalte } j
 \end{array}$$

## Lineare Gleichungssysteme

Für die Lösungsmenge  $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$  von  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  der Ordnung  $m \times n$  gilt:

| keine Lösung                                                    | genau eine Lösung                                                                                 | unendlich viele Lösungen                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{rang}(\mathbf{A}) < \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ | $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$ | $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) < n$ |

Cramersche Regel

Es sei  $\mathbf{A}$  eine invertierbare  $n \times n$ -Matrix.

Mit  $\mathbf{A}_{(j)} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  ist die eindeutige Lösung  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  von  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  gegeben durch:

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_{(j)})}{\det(\mathbf{A})} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

## Eigenwerttheorie

Für eine  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}$  heißt eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$ , für die das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

eine Lösung  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  besitzt, reeller Eigenwert von  $\mathbf{A}$  und der Vektor  $\mathbf{x}$  wird als reeller Eigenvektor von  $\mathbf{A}$  zum Eigenwert  $\lambda$  bezeichnet.

Eigenschaften

---


$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{A} \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  seien Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ , dann gilt:

$\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$  sind Eigenwerte von  $\mathbf{A}^m$

$\mathbf{A}$  invertierbar  $\Leftrightarrow \lambda_i \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$

$\mathbf{A}$  invertierbar  $\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$  Eigenwerte von  $\mathbf{A}^{-1}$

$\mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}^T$  besitzen die gleichen Eigenwerte

$\mathbf{A}$  orthogonal  $\Rightarrow |\lambda_i| = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$

---

## Diagonalisierbarkeit

Es seien  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  quadratische  $n \times n$ -Matrizen.

|                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ähnlichkeit                        | $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ mit invertierbarer $n \times n$ -Matrix $\mathbf{T}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Eigenschaften                      | $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{B}}(\lambda)$<br>$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$<br>$\text{spur}(\mathbf{A}) = \text{spur}(\mathbf{B})$<br>$\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ haben die gleichen Eigenwerte<br>$\mathbf{A}$ invertierbar $\iff \mathbf{B}$ invertierbar<br>$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{B})$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Diagonalisierbarkeit               | Es existiert eine invertierbare $n \times n$ -Matrix $\mathbf{X}$ mit $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}$ mit $n \times n$ -Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Kriterien für Diagonalisierbarkeit | $\mathbf{A}$ diagonalisierbar $\iff$<br>$\mathbf{A}$ besitzt $n$ linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ .<br>Für die Matrix $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ gilt dann $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ .<br>$\mathbf{A}$ besitzt $n$ verschiedene Eigenwerte $\implies$<br>$\mathbf{A}$ ist diagonalisierbar.<br>$\mathbf{A}$ symmetrisch $\iff$<br>$\mathbf{A}$ besitzt $n$ normierte orthogonale Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ .<br>Die Matrix $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ist dann orthogonal<br>und es gilt $\mathbf{D} = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ . |

## Quadratische Formen

Die zur symmetrischen  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}$  gehörende quadratische Form ist die reellwertige Funktion:

$$q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto q(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n a_{ij} x_i x_j$$

### Definitheitseigenschaften

Es sei eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}$ .

|                              | Quadratische Form<br>$q(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$                                                                                       | reelle Eigenwerte<br>$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ | Hauptminoren<br>$\det(\mathbf{H}_1), \dots, \det(\mathbf{H}_n)$                                        |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{A}$ positiv definit | $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$                                                         | $\lambda_i > 0 \ \forall i = 1, \dots, n$          | $\det(\mathbf{H}_k) > 0 \ \forall k = 1, \dots, n$                                                     |
| $\mathbf{A}$ negativ definit | $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$                                                         | $\lambda_i < 0 \ \forall i = 1, \dots, n$          | $(-1)^k \det(\mathbf{H}_k) > 0 \ \forall k = 1, \dots, n$                                              |
| $\mathbf{A}$ indefinit       | $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$<br>und $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} < 0$ | es gibt positive und negative Eigenwerte           | weder $\det(\mathbf{H}_k) \geq 0$ noch<br>$(-1)^k \det(\mathbf{H}_k) \geq 0 \ \forall k = 1, \dots, n$ |