

Kurzlösungen zu den Übungsaufgaben des Vorkurses Mathematik

Kapitel 2

1

- a) $M_1 = [1, 3]$
- b) $M_2 = \{x | x \in \mathbb{N}_0\}$
- c) $M_3 = \{x | x \in \mathbb{Z}\}$
- d) $M_4 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
- e) $M_5 = \{3, 4\}$
- f) $M_6 = \{\}$
- g) $M_7 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

2

| | | | | | | | | | |
|--------------|---|------------|----------------|----|------------|------|--------------|-----|---|
| | 2 | $\sqrt{3}$ | $\frac{15}{3}$ | -7 | $4\bar{6}$ | $4i$ | $\sqrt{256}$ | 0,6 | 0 |
| \mathbb{N} | x | | x | | | | x | | |
| \mathbb{Z} | x | | x | x | | | x | | x |
| \mathbb{Q} | x | | x | x | x | | x | x | x |
| \mathbb{I} | | x | | | | | | | |
| \mathbb{R} | x | x | x | x | x | | x | x | x |
| \mathbb{C} | x | x | x | x | x | x | x | x | x |

3

- a) $A \cap D = \emptyset$
- b) $B \cup C = \{b, c, d, e, f, g, h\}$
- c) $A \setminus D = A$
- d) $(B \cup D) \setminus C = \{b, c, d, h, j\}$

e) $(C \cap A) \cup B = \{b, c, d, e, f, g, h\}$

f) $(C \cup A) \cap B = \{c, f\}$

4

a) $A = \{a\}$ $B = \{b, c\}$ $C = \{e\}$ $D = \{c, d\}$ $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$

b) $A = \{a\}$ $B = \{b, c\}$ $C = \{e\}$ $D = \{c, d, e\}$ $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$

c) klar :)

d) zu a) disjunkt

zu b) echte Teilmenge

5

a) 54

b) 270

c) 476

d) $14x^2 + 23xy + 3y^2$

6

a) $36 \cdot (1 + 2 + 4 + 8)$

b) $3 \cdot (7 + 3 + 105 - 14)$

c) $-13 \cdot (1 + 12 - 21)$

7

a) -5

b) 10

c) -69

8

- a) $9a^2 - 30ab + 25b^2$
- b) $196x^2 + 28xy + y^2$
- c) $64x^2 - 9y^2$
- d) $729x^3 + 972x^2y + 432xy^2 + 64y^3$
- e) $8a^3 - 96a^2b + 384ab^2 - 512b^3$
- f) $4096x^4 - 1152x^2y^2 + 81y^4$

9

- a) $(x + 3)(x - 9)$
- b) $(x - 12)^2$
- c) $(x + 1)(x - 1)$
- d) $(x + 5)(x - 4)$
- e) $(x - 1)(x - 8)$
- f) $(x + 7)^2$
- g) $(x + 6)(x + 7)$

10

- a) $x^2 - x - 6$
- b) $3x^2 - x + 4$

11

- a) 1
- b) 1
- c) 0
- d) 1

12

a) $-\frac{b}{a+b}$

b) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$

c) $v + 1$

d) $\frac{a}{b}$

13

a) 5764801

b) 4096

c) $-\frac{1}{1728}$

d) 1,20094

e) 2,15523

f) $\frac{1}{2}$

14

a) $\sqrt[3]{x^2}$

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{a+b^2}}$

d) $x^{\frac{3}{7}}$

e) $(2a)^{\frac{3}{4}}$

f) $x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$

15

a) 0,89824

b) 3,15465

c) -0,32193

d) 3,38745

16

- a) 8
- b) 2664
- c) 2319134400
- d) 148200
- e) 114

17

- a) $6(xy)^2$
- b) 64
- c) $9x^2y^4 - 30xy^{b+4} + 25y^{2b+4}$
- d) $-2x^2 + 3ax + 2$
- e) 5
- f) a^6
- g) $\frac{1}{x^2}$

Kapitel 3

18

- a) $x = 1$
- b) $x = -4$
- c) $\mathbb{L} = \{x | x \in \mathbb{R}\}$
- d) $\mathbb{L} = \{\}$

19

- a) Es gilt: $x_1 = 4$ und $x_2 = -3$
- b) Es gilt: $x_1 = -3$ und $x_2 = -8$

20

$$\text{Disk} = -4$$
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i$$

21

- a) $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1$
- b) $x_{1,2,3} = -2$
- c) $x_1 = 2, x_{2,3} = -2, 5 \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}i$

22

- a) $x_1 = 0, x_2 = 8$
- b) $x = 9$
- c) $x = 1, 2$
- d) $x = \frac{4}{3}$

23

- a) $x < -\frac{2}{3}$
- b) $x \geq \frac{1}{8}$
- c) $-2 \leq x \leq 2$

24

Es gilt: $x = 0, 5, y = -0, 5$

25

Es gilt: $x = 1, y = 2, z = 3$

Kapitel 4

26

| x | -3 | -2 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
|-------------------------|--------|--------|-------|--------|---|--------|------|-------|--------|
| $f_1(x) = 4x$ | -12 | -8 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 8 | 12 |
| $f_2(x) = 6x^2 - x$ | 57 | 26 | 7 | 2 | 0 | 1 | 5 | 22 | 51 |
| $f_3(x) = x^5$ | -243 | -32 | -1 | -0,031 | 0 | 0,031 | 1 | 32 | 243 |
| $f_4(x) = \frac{1}{4x}$ | -0,083 | -0,125 | -0,25 | -0,5 | | 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0,083 |
| $f_5(x) = \sqrt{x}$ | | | | | 0 | 0,707 | 1 | 1,414 | 1,732 |
| $f_6(x) = x^e$ | | | | | 0 | 0,152 | 1 | 6,581 | 19,813 |
| $f_7(x) = 2^x$ | 0,125 | 0,25 | 0,5 | 0,707 | 1 | 1,414 | 2 | 4 | 8 |
| $f_8(x) = \ln(x)$ | | | | | | -0,693 | 0 | 0,693 | 1,099 |

27

- a) $x = \frac{1}{2}\pi$
- b) $x = \frac{2}{3}\pi$
- c) $\alpha = 30^\circ$
- d) $\alpha = 360^\circ$

28

- a) $f(x) = \ln(x)$
- b) $f(x) = x^3 - x^2$
- c) $f(x) = -x^3$
- d) $f(x) = 5$

29

- a) 3
- b) 0

- c) 2
- d) $-\infty$
- e) $\pm\infty$
- f) 8

30

Für $a = \frac{2}{3}$ ist die Funktion f stetig.

31

f ist für $a = -1$, $b = 3$ und $c = 2$ stetig und differenzierbar.

32

- a) $f'_1(x) = 52x^3 + 10x$
- b) $f'_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 42x^2 + \frac{2}{x}$
- c) $f'_3(x) = \frac{4}{x} \cdot e^{5x} \cdot \left(-\frac{1}{x} + 5\right)$
- d) $f'_4(x) = -\frac{8 \cdot (3 - 2 \ln(x))^3}{x}$
- e) $f'_5(x) = \frac{1}{x^2 + \sin(2x)} \cdot (2x + 2 \cos(2x))$
- f) $f'_6(x) = \frac{10}{\sqrt{20x} \cdot e^x} - \frac{\sqrt{20x}}{e^x}$
- g) $f'_7(x) = 7^x \cdot \ln(7) \cdot (\ln(7) \cdot x + 1)$
- h) $f'_8(x) = \frac{1}{x}$
- i) $f'_9(x) = -1 - \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$

33

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f'''(x)$ |
|--------------------------|--|---|--|
| $6x^3 + 2x^2 - 4x - 7$ | $18x^2 + 4x - 4$ | $36x + 4$ | 36 |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | $-\cos(x)$ |
| e^{x^3} | $3x^2 \cdot e^{x^3}$ | $e^{x^3} \cdot (9x^4 + 6x)$ | $e^{x^3} \cdot (27x^6 + 54x^3 + 6)$ |
| $\sqrt{16x} = 4\sqrt{x}$ | $\frac{2}{\sqrt{x}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ | $\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$ |
| $\frac{\ln(x)}{e^x}$ | $e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{x} - \ln(x)\right)$ | $e^{-x} \cdot \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln(x)\right)$ | $e^{-x} \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \ln(x)\right)$ |

34

$$f_1(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

1) **Definitionsbereich:** $D_1 = \mathbb{R}$

2) **Nullstellen:** $x_1 = 0, x_2 \approx 3,3117, x_3 \approx -1,8117$

3) **Stetigkeit:** Ja, da Polynome stets stetig sind.

4) **Extrema:** Ein Hochpunkt liegt bei $(-1; 3,5)$ und ein Tiefpunkt bei $(2; -10)$.

5) **Wendepunkte:** Es liegt ein Konkav-Konvex-Wendepunkt bei $(0,5; -3,25)$.

6) **Monotonieverhalten:**

Für $x \in (-\infty; -1]$ verläuft f wegen $f'(x) > 0$ für $x \in (-\infty; -1)$ und $f'(-1) = 0$ streng monoton steigend.

Für $x \in [-1; 2]$ verläuft f wegen $f'(x) < 0$ für $x \in (-1; 2)$ und $f'(-1) = f'(2) = 0$ streng monoton fallend.

Für $x \in [2; \infty)$ verläuft f wegen $f'(x) > 0$ für $x \in (2; \infty)$ und $f'(2) = 0$ streng monoton steigend.

7) **Krümmungsverhalten:**

Für $x \in (-\infty; 0,5]$ verläuft f wegen $f''(x) < 0$ für $x \in (-\infty; 0,5)$ und $f''(0,5) = 0$ streng konkav.

Für $x \in [0,5; \infty)$ verläuft f wegen $f''(x) > 0$ für $x \in (0,5; \infty)$ und $f''(0,5) = 0$ streng konvex.

8) **Asymptotisches Verhalten:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -\infty$$

$$f_2(x) = x \cdot \ln(x)$$

1) **Definitionsbereich:** $D_2 = \{x | x > 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

2) **Nullstellen:** $x = 1$

3) **Stetigkeit:** Die Funktion f_2 ist stetig.

4) **Extrema:**

Ein Tiefpunkt liegt bei $(e^{-1}; -e^{-1})$.

5) **Wendepunkt:** $f_2(x)$ besitzt keinen Wendepunkt.

6) **Monotonieverhalten:**

Für $x \in (0; e^{-1}]$ verläuft f wegen $f'(x) < 0$ für $x \in (0; e^{-1})$ und $f''(e^{-1}) = 0$ monoton fallend.

Für $x \in [e^{-1}; \infty)$ verläuft f wegen $f'(x) > 0$ für $x \in (e^{-1}; \infty)$ und $f''(e^{-1}) = 0$ monoton steigend.

7) **Krümmungsverhalten:**

Für $x \in (0; \infty)$ verläuft f wegen $f''(x) > 0$ für $x \in (0; \infty)$ und $f''(0) = 0$ strengkonvex.

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = \infty$

8) **Asymptotisches Verhalten:**

Kapitel 5

35

a) $2x^3 - 2x^2 + 3x + c$

b) $\cos(x) + c$

c) $10 \ln |u| + c$

d) $\frac{1}{2}e^{2z} + c$

e) $\log_5 |x| + c$

f) $3^x + c$

g) $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c$

36

a) $\ln(3)$

b) 0

c) $\frac{8}{3}$

d) 0

e) $\frac{1}{6}$

f) 22

37

2,5

38

$\frac{4}{3}$

39

a) 1

b) 2

c) 1

40

a) 2

b) $e^{\frac{1}{12}x^3} + c$

c) 12,778

d) $-e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 3) + c$

e) 2,72066