

Vorkurs Mathematik

Wintersemester 2018/2019

Übungsaufgaben

*Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Mathematik
und Statistik in den Wirtschaftswissenschaften*



Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG



GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

Kapitel 2

Essentials

6 Übungsaufgaben

- 1) Geben Sie die folgenden Mengen in einer jeweils anderen Darstellung (Aufzählende Darstellung oder Intervalldarstellung, ggf. beschreibende Darstellung) an. Hierbei gelte $x \in \mathbb{Z}$.

$$M_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$M_2 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$M_3 = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$M_4 = (6, 13]$$

$$M_5 =]2, 5[$$

$$M_6 = \emptyset$$

$$M_7 =]1, 9]$$

- 2) Ordnen Sie die folgenden Zahlen den Zahlenmengen zu, in denen sie enthalten sind.

$$2 \quad \sqrt{3} \quad \frac{15}{3} \quad -7 \quad 4, \bar{6} \quad 4i \quad \sqrt{256} \quad 0,6 \quad 0$$

3) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{a, c, e, g, i\}$$

$$B = \{b, c, d, f, h\}$$

$$C = \{e, f, g\}$$

$$D = \{b, h, j\}$$

Bestimmen Sie:

a) $A \cap D$

b) $B \cup C$

c) $A \setminus D$

d) $(B \cup D) \setminus C$

e) $(C \cap A) \cup B$

f) $(C \cup A) \cap B$

Fertigen Sie zudem ein geeignetes Venn-Diagramm an, aus dem alle betrachteten Mengen und ihre Elemente hervorgehen.

4) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A \cap \Omega = \{a\}$$

$$B \cap D = \{c\}$$

$$D \cup C = \{c, d, e\}$$

$$B \setminus D = \{b\}$$

$$\overline{C} = \{a, b, c, d, f\}$$

- a) Bestimmen Sie die Grundmenge Ω sowie ihre Teilmengen A, B, C, D unter der zusätzlichen Bedingung $D \cap \overline{B} = \{d\}$.
- b) Bestimmen Sie die Grundmenge Ω sowie ihre Teilmengen A, B, C, D unter der zusätzlichen Bedingung $D \cap \overline{B} = \{d, e\}$.
- c) Skizzieren Sie zu a) und zu b) jeweils ein geeignetes Venn-Diagramm, aus dem alle betrachteten Mengen und ihre jeweiligen Elemente hervorgehen.
- d) Wie bezeichnet man die Menge C in Bezug auf die Menge D in Aufgabenteil a) bzw. b)? Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

6 Übungsaufgaben

- 5) Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus und berechnen Sie sie so weit wie möglich.

- a) $(4 + 2) \cdot (3 + 6)$
- b) $(12 - 3) \cdot (7 - 1) \cdot 5$
- c) $(7 - 3 + 10) \cdot (14 + 3) \cdot (4 - 2)$
- d) $(2x + 3y) \cdot (7x + y)$

- 6) Klammern Sie in den folgenden Ausdrücken gemeinsame Faktoren aus.

- a) $36 + 72 + 144 + 288$
- b) $21 + 9 + 315 - 42$
- c) $-13 - 156 + 273$

- 7) Berechnen Sie:

- a) $4 + 2 \cdot 3 - 10 \cdot 3/6 + (4 - (3 + 11))$
- b) $(10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} - 3) \cdot (-(4/2 - 3)) \cdot 10$
- c) $-(-(7 + 4 \cdot (3 - 2 \cdot (4 + 7))))$

6 Übungsaufgaben

8) Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke unter Verwendung der Binomischen Formeln und des Pascalschen Dreiecks aus.

a) $(3a - 5b)^2$

b) $(14x + y)^2$

c) $(8x - 3y) \cdot (3y + 8x)$

d) $(9x + 4y)^3$

e) $(2a - 8b)^3$

f) $(8x - 3y)^2 \cdot (3y + 8x)^2$

9) Zerlegen Sie die folgenden Ausdrücke in Linearfaktoren.

a) $x^2 - 6x - 27$

b) $x^2 - 24x + 144$

c) $x^2 - 1$

d) $x^2 + x - 20$

e) $x^2 - 9x + 8$

f) $x^2 + 14x + 49$

g) $x^2 + 13x + 42$

6 Übungsaufgaben

10) Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

a) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$

b) $(3x^3 - 10x^2 + 7x - 12) : (x - 3)$

11) Berechnen Sie:

a)

$$\frac{6}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{7} \right)$$

b)

$$\frac{7}{6} + \frac{2}{3} - \frac{10}{12}$$

c)

$$4 \cdot \frac{10}{9} - 2 + \frac{15}{27} - \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{4}$$

d)

$$\frac{11}{13} \cdot \frac{4}{7} : \frac{4}{3} - \left(-\frac{58}{91} \right)$$

12) Fassen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich zusammen:

a)

$$\frac{a}{a+b} - 1$$

b)

$$\frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} - \frac{2a \cdot (x-b)}{a^2 - b^2}$$

c)

$$\frac{v}{1 - \frac{1}{v}} - \frac{1}{v-1}$$

d)

$$\frac{1 + \frac{a}{b}}{1 + \frac{b}{a}}$$

6 Übungsaufgaben

13) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(7^2)^4$

b) $\left(\frac{8^3}{2^3}\right)^2$

c) -12^{-3}

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{9}}$

e) $\sqrt[7]{6^3}$

f) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}}$

14) Schreiben Sie die folgenden Terme in Wurzel- bzw. Potenzform um:

a) $x^{\frac{2}{3}}$

b) $a^{-\frac{3}{4}}$

c) $(a + b^2)^{-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[7]{x^3}$

e) $(\sqrt[4]{2a})^3$

f) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{y}}$

6 Übungsaufgaben

15) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\log_6 5$

b) $\log_3 4 + \log_3 8$

c) $\log_2 4 - \log_2 5$

d) $\log_7 (3^6)$

16) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $|-10 - 13 + 15|$

b) $\sum_{i=5}^7 (4i^3 - 4i)$

c) $\prod_{i=1}^5 11i^2$

d) $\prod_{i=2}^4 (i + 6i^2)$

e) $5! - 3!$

6 Übungsaufgaben

17) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(30x^4y^7) : (5x^2y^5)$

b) $((16ab)^3) : ((4ab)^3)$

c) $(3xy^2 - 5y^{b+2})^2$

d) $(-2x^4 + ax^3 + 3a^2x^2 + 4x^2 - ax - 2) : (x^2 + ax - 1)$

e) $\frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{7}{12} + \frac{1}{8} + \frac{5}{6} + \frac{2}{9} + \frac{5}{18} + \frac{11}{24} - \frac{1}{12}$

f) $\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt{a} \cdot a \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[8]{a^5} \cdot \sqrt[24]{a^{19}}$

g) $\frac{3 \cdot \sum_{i=1}^3 3x}{\prod_{i=1}^3 3x}$

Kapitel 3

Gleichungen und Ungleichungen

6 Übungsaufgaben

18) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungen, sofern möglich.

a) $11x - 7 = 4$

b) $3x + 9 - 2x + 6x = 4x - 7 + 4$

c) $8x - 2 - 2x + x \cdot (3 - 5) = 11x - 3 - 7x + 1$

d) $-(7 + 4x) - (3x + 2) = 2x \cdot (5 - 2) - 13x - 10$

19) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen jeweils nach allen vier Verfahren, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben.

a) $x^2 - x = 12$

b) $x^2 + 11x + 10 = -14$

20) Berechnen Sie die Diskriminante und die Lösungen der folgenden Gleichung.

$$x^2 + x + \frac{5}{4} = 0$$

6 Übungsaufgaben

21) Lösen Sie die folgenden kubischen Gleichungen.

a) $7x^3 - 7x = 0$

b) $x^3 + 6x^2 + 12x = -8$

c) $x^3 + 3x^2 - 3x = 14$

22) Lösen Sie die folgenden speziellen Gleichungen.

a) $\frac{2x + 8}{2x - 4} = \frac{7x + 4}{4x - 2}$

b) $\sqrt{7x + 1} - 3 = 5$

c) $5^x \cdot 25^{2x-1} = 625$

d) $\ln x = \ln 4 - \ln 3$

23) Lösen Sie die folgenden Ungleichungen.

a) $7x + 14 < 4 - 8x$

b) $-12x - 3 \leq 4x - 5$

c) $-4x^2 \geq -16$

6 Übungsaufgaben

- 24) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem nach allen drei Ihnen aus der Vorlesung bekannten Verfahren.

$$8x + 4y = 2$$

$$12x - 2y = 7$$

- 25) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$x - y + z = 2$$

$$3x - 2y + 2z = 5$$

$$-3x + 3y + 5z = 18$$

Kapitel 4

Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

- 26) Stellen Sie für die folgenden Funktionen jeweils eine geeignete Wertetabelle auf und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

$$f_1(x) = 4x$$

$$f_2(x) = 6x^2 - x$$

$$f_3(x) = x^5$$

$$f_4(x) = \frac{1}{4x}$$

$$f_5(x) = \sqrt{x}$$

$$f_6(x) = x^e$$

$$f_7(x) = 2^x$$

$$f_8(x) = \ln(x)$$

27) Rechnen Sie das gegebene Maß in das jeweilige andere Maß um.

a) $\alpha = 90^\circ$

b) $\alpha = 120^\circ$

c) $x = \frac{\pi}{6}$

d) $x = 2\pi$

28) Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Funktion mit den folgenden Eigenschaften.

a) monoton wachsend, (streng) konkav, unbeschränkt

b) nicht monoton, teils streng konvex, teils streng konkav, unbeschränkt, zwei Extrema, ein Wendepunkt

c) monoton fallend, erst streng konvex, dann streng konkav, punktsymmetrisch, unbeschränkt, keine Extrema, ein Terrassenpunkt

d) gleichzeitig monoton wachsend und fallend, gleichzeitig konvex und konkav, achsensymmetrisch

29) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{2^{x-2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^4 + x^3 - x + 4}{x^4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{10x^3}{x^4} \cdot \frac{2x}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} \right)$$

- 30) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ derart, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für } x \leq 1 \\ ax^2 + \frac{1}{3} & \text{für } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

eine an der Stelle $x = 1$ stetige Funktion darstellt.

- 31) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{für } x \leq -1 \\ -x^2 - 4x - 1 & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ x^3 - 3bx + c & \text{für } x > 1 \end{cases} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Parameter a , b und c so, dass f eine stetige und differenzierbare Funktion darstellt.

- 32) Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$f_1(x) = 13x^4 + 5x^2 - 3$$

$$f_2(x) = \sqrt{x} - 14x^3 + \ln(x^2)$$

$$f_3(x) = \frac{4}{x} \cdot e^{5x}$$

$$f_4(x) = (3 - 2 \ln x)^4$$

$$f_5(x) = \ln(x^2 + \sin(2x))$$

$$f_6(x) = \frac{\sqrt{20x}}{e^x}$$

$$f_7(x) = 7^x \cdot \ln(7^x)$$

$$f_8(x) = \log_4(x) \cdot \ln(4)$$

$$f_9(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

- 33) Berechnen Sie jeweils die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen.

$$f_1(x) = 6x^3 + 2x^2 - 4x - 7$$

$$f_2(x) = \sin(x)$$

$$f_3(x) = e^{x^3}$$

$$f_4(x) = \sqrt{16x}$$

$$f_5(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$$

- 34) Führen Sie an den folgenden Funktionen jeweils eine umfassende Kurvendiskussion durch, die alle acht in Kapitel 4.5 erläuterten Punkte abhandelt. Skizzieren Sie anschließend den Graphen der Funktionen.

$$f_1(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$f_2(x) = x \cdot \ln(x)$$

Kapitel 5

Integralrechnung in $\mathbb{R}$

35) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

$$\int (6x^2 - 4x + 3) \, dx$$

$$\int -\sin(x) \, dx$$

$$\int 10u^{-1} \, du$$

$$\int e^{2z} \, dz$$

$$\int (\ln(5) \cdot x)^{-1} \, dx$$

$$\int \ln(3) \cdot 3^x \, dx$$

$$\int \sqrt{t} \, dt$$

36) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

$$\int_1^3 \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(x) \, dx$$

$$\int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \right) \, dx$$

$$\int_4^4 \sqrt[7]{7x} \, dx$$

$$\int_2^3 \frac{2}{(x+1)^2} \, dx$$

$$\int_0^4 f(x) \, dx \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{für } x < 2 \\ 4x-2 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

- 37) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion

$$f(x) = 4x^2 + 6x - 4$$

und der x -Achse innerhalb des Integrationsintervalls $[0, 1]$.

- 38) Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Funktionen

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

eingeschlossen wird.

39) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_1^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{(|x| + 4)^2} dx$$

40) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\int_0^1 2x \cdot e^x \, dx$$

$$\int \frac{1}{4} x^2 \cdot \exp\left(\frac{1}{12} x^3\right) \, dx$$

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} \, dx$$

$$\int (1 + x^2) \cdot e^{-x} \, dx$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{2}{x}} \, dx$$