Institut für Mathematik und Statistik in den Wirtschaftswissenschaften
Prof. Dr. Michael Merz
Wintersemester 2019/2020

Formelsammlung

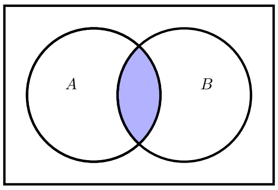
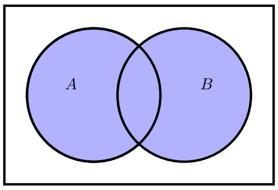
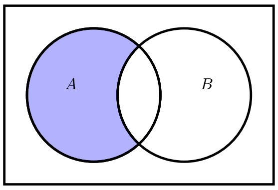
Aussagenlogik

Für beliebige Aussagen A, B gilt:

Konjunktion					Disjunktion					Implikation					Äquivalenz				
A	w	w	f	f	A	w	w	f	f	A	w	w	f	f	A	w	w	f	f
B	w	f	w	f	B	w	f	w	f	B	w	f	w	f	B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f	$A \vee B$	w	w	w	f	$A \Rightarrow B$	w	f	w	w	$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

Mengenlehre

Für beliebige Mengen A, B gilt:

Schnittmenge $A \cap B$	Vereinigungsmenge $A \cup B$	Differenzmenge $A \setminus B$
		

Komplexe Zahlen $\mathbb{C} := \{z : z = a + ib, \;\; a, b \in \mathbb{R}\}$

$i^2 := -1$	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2} =: r$
$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ $z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$	$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$
$\overline{z} = a - ib$ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ für $z_2 \neq 0$	$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ $\overline{\overline{z}} = z$
$Re(z_1) = \frac{1}{2} \cdot (z + \overline{z})$ und $Im(z) = \frac{1}{2i} \cdot (z - \overline{z})$ $z_1 z_2 = r_1 e^{ix_1} \cdot r_2 e^{ix_2} = r_1 r_2 e^{i(x_1 + x_2)}$ $z^n = (re^{ix})^n = r^n e^{inx}$ für $n \in \mathbb{N}_0$	$z = r\cos(x) + ir\sin(x) = re^{ix}$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{ix_1}}{r_2 e^{ix_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(x_1 - x_2)}$ für $z_2 \neq 0$ $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$

Abbildungen

Es seien M, N nichtleere Mengen.
$f : M \to N$

Injektiv	$f(x_1) \neq f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$
Surjektiv	$\forall y \in N\ \exists x \in M : f(x) = y$
Bijektiv	injektiv und surjektiv

$f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Konvex ($\lambda \in (0,1)$)	$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \;\; \forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$
Konkav ($\lambda \in (0,1)$)	$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \;\; \forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$

Konvexe Menge

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn aus $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in M$ und $\lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \mathbf{a}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{a}_2 \in M \;\; \forall \lambda \in [0,1]$ gilt.

Vektoren $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$

Skalarprodukt	Norm	Abstand	Winkel
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$	$\|\|\mathbf{x}\|\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	$\|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$	$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\|\mathbf{x}\|\| \cdot \|\|\mathbf{y}\|\|}\right)$

Eigenschaften

des euklidischen Skalarprodukts, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ $\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y} \rangle = \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$
der euklidischen Norm, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\\|\mathbf{x}\\| \geq 0$ $\\|\lambda\mathbf{x}\\| = \|\lambda\| \cdot \\|\mathbf{x}\\|$	$\\|\mathbf{x}\\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ $\\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\\| \leq \\|\mathbf{x}\\| + \\|\mathbf{y}\\|$
Orthogonalität $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ Orthonormalität	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \wedge \\|\mathbf{x}\\| = \\|\mathbf{y}\\| = 1$	

Lineare Abbildungen

Es sei U eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Linearer Unterraum	
Vektoraddition	$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$
skalare Multiplikation	$\lambda\mathbf{x} \in U$ für alle $\mathbf{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$
Lineare Abbildung $f : U \to V$, $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ lineare Unterräume	
Additivität	$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$
Homogenität	$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$

	einer linearen Abbildung $f : U \to V$	einer $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$
Kern	Kern(f):= $\{\mathbf{x} \in U : f(x) = 0\}$	Kern($\mathbf{A}$):= $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
Bild	Bild(f):= $\{\mathbf{y} \in V :$ es gibt ein $\mathbf{x} \in U$ mit $\mathbf{y} = f(x)\}$	Bild($\mathbf{A}$):= $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m :$ es gibt ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$
Rang		$\text{rang}(\mathbf{A}) := \dim(\text{Bild}(\mathbf{A}))$

Zusammenhänge

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}^T) \qquad \text{rang}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$$

$$\dim(\text{Kern(f)} + \dim(\text{Bild(f)}) = \dim(U) \qquad \dim(\text{Kern}(\mathbf{A})) + \text{rang}(\mathbf{A}) = n$$

$$\text{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\} \Longleftrightarrow \text{rang}(\mathbf{A}) = n$$

Matrizen

Es sei $\mathbf{A}$ eine quadratische $n \times n$-Matrix.

Inverse Matrix	$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$
Symmetrische Matrix	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
Orthogonale Matrix	$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$
Spur	$\operatorname{spur}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Eigenschaften

der Spur	$\operatorname{spur}(\mathbf{E}_n) = n$ $\operatorname{spur}(\mathbf{A}) = \operatorname{spur}(\mathbf{A}^T)$	$\operatorname{spur}(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = \lambda \operatorname{spur}(\mathbf{A}) + \mu \operatorname{spur}(\mathbf{B})$ für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(n,n), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\operatorname{spur}(\mathbf{AB}) = \operatorname{spur}(\mathbf{BA})$ für $\mathbf{A} \in M(m,n)$ und $\mathbf{B} \in M(n,m)$
inverser Matrizen	$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$	$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ $(r\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{r}\mathbf{A}^{-1}$

Berechnungsformeln für invertierbare Matrizen

2 × 2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$n \times n$-Matrix:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^* & \mathbf{A}_{21}^* & \cdots & \mathbf{A}_{n1}^* \\ \mathbf{A}_{12}^* & \mathbf{A}_{22}^* & \cdots & \mathbf{A}_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n}^* & \mathbf{A}_{2n}^* & \cdots & \mathbf{A}_{nn}^* \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{A}_{ij}^* := (-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})$ die Kofaktoren der Matrix $\mathbf{A}$ sind.

Determinanten

Es seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ quadratische $n \times n$-Matrizen.

Eigenschaften von Determinanten

$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$	$\mathbf{A}$ invertierbar $\Rightarrow \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$
$\det(r\mathbf{A}) = r^n \det(\mathbf{A})$	$\mathbf{A}$ orthogonal $\Rightarrow \lvert\det(\mathbf{A})\rvert = 1$
$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$	

Berechnungsformeln

$n \times n$-Matrix:

$$\det(\mathbf{A}) := \begin{cases} a_{11} & \text{für } n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j}\det(\mathbf{A}_{1j}) & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

2 × 2-Matrix:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3 × 3-Matrix:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Dreiecksmatrix:

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

nach Laplace, mit Untermatrix $\mathbf{A}_{ij}$:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\det(\mathbf{A}_{ij}) \qquad \text{Entwicklung nach Zeile } i$$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij}\det(\mathbf{A}_{ij}) \qquad \text{Entwicklung nach Spalte } j$$

Lineare Gleichungssysteme

Für die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ von $\mathbf{Ax}$=$\mathbf{b}$ der Ordnung $m \times n$ gilt:

keine Lösung	genau eine Lösung	unendlich viele Lösungen
$\text{rang}(\mathbf{A}) < \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$	$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$	$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) < n$

Cramersche Regel
Es sei $\mathbf{A}$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix.

Mit $A_{(j)} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ist die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ gegeben durch:

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_{(j)})}{\det(\mathbf{A})} \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

Eigenworttheorie

Für eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ heißt eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

eine Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ besitzt, reeller Eigenwert von $\mathbf{A}$ und der Vektor $\mathbf{x}$ wird als reeller Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ bezeichnet.

Eigenschaften

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{A} \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien Eigenwerte von $\mathbf{A}$, dann gilt:

$\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$ sind Eigenwerte von $\mathbf{A}^m$

$\mathbf{A}$ invertierbar $\Leftrightarrow \lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$

$\mathbf{A}$ invertierbar $\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$

$\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$ besitzen die gleichen Eigenwerte

$\mathbf{A}$ orthogonal $\Rightarrow |\lambda_i| = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$

Diagonalisierbarkeit

Es seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ quadratische $n \times n$-Matrizen.

Ähnlichkeit	$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ mit invertierbarer $n \times n$-Matrix T
Eigenschaften	$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = p_{\mathbf{B}}(\lambda)$ $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ $\text{spur}(\mathbf{A}) = \text{spur}(\mathbf{B})$ $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ haben die gleichen Eigenwerte $\mathbf{A}$ invertierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{B}$ invertierbar $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{B})$
Diagonalisierbarkeit	Es existiert eine invertierbare $n \times n$-Matrix $\mathbf{X}$ mit $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1}$ mit $n \times n$-Diagonalmatrix $\mathbf{D}$.
Kriterien für Diagonalisierbarkeit	$\mathbf{A}$ diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$ besitzt n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Für die Matrix $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \ldots, x_n)$ gilt dann $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$. $\mathbf{A}$ besitzt n verschiedene Eigenwerte $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ ist diagonalisierbar. $\mathbf{A}$ symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{A}$ besitzt n normierte orthogonale Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Die Matrix $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ ist dann orthogonal und es gilt $\mathbf{D} = \mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$.

Quadratische Formen

Die zur symmetrischen $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ gehörende quadratische Form ist die reellwertige Funktion:

$$q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto q(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Definitheitseigenschaften

Es sei eine symmetrische $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$.

	Quadratische Form $q(x) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$	reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$	Hauptminoren $\det(\mathbf{H}_1), \ldots, \det(\mathbf{H}_n)$
$\mathbf{A}$ positiv definit	$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$	$\lambda_i > 0\ \forall i = 1, \ldots, n$	$\det(\mathbf{H}_k) > 0\ \forall k = 1, \ldots, n$
$\mathbf{A}$ negativ definit	$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$	$\lambda_i < 0\ \forall i = 1, \ldots, n$	$(-1)^k \det(\mathbf{H}_k) > 0\ \forall k = 1, \ldots, n$
$\mathbf{A}$ indefinit	$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ mit $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ und $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$	es gibt positive und negative Eigenwerte	weder $\det(\mathbf{H}_k) \geq 0$ noch $(-1)^k \det(\mathbf{H}_k) \geq 0\ \forall k = 1, \ldots, n$