

Übung 1: Entscheidung unter Risiko I

Aufgabe 1 (Sankt-Petersburg-Paradoxon)

Die Zufallsvariable N gibt die Anzahl der benötigten Versuche an, bis beim Werfen einer fairen Münze zum ersten Mal „Kopf“ auftritt.

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion f_N von N .
- Berechnen Sie $\mathbb{E}[N]$ und $\text{Var}(N)$.
- Bestimmen Sie den Erwartungsnutzen von $X = 2^N$, wenn die Nutzenfunktion $u(x) = \ln(x)$ zugrunde gelegt wird.

Aufgabe 2

Einem Entscheidungsträger mit der Nutzenfunktion

$$u(x) = -\frac{x^2}{100.000} + 2x$$

werden zwei Alternativen angeboten. Bei der ersten Alternative a_1 beträgt der Gewinn 20.000 € oder 40.000 € jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%. Bei der zweiten Alternative a_2 kommt jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% ein Gewinn von x € oder 0 € zur Auszahlung. Wie hoch muss bei der zweiten Alternative der Gewinn x sein, damit der Entscheidungsträger zwischen den beiden Alternativen indifferent ist?

Aufgabe 3

Betrachtet wird ein Entscheidungsträger, der das Anfangskapital $K > 0$ investieren möchte und die Nutzenfunktion

$$u(x) = \sqrt{x} \quad \text{für } x \geq 0$$

besitzt. Zur Auswahl stehen ihm zwei verschiedene Anlagealternativen a_1 und a_2 , welche am Ende des Anlagezeitraums zum Endkapital KX_1 bzw. KX_2 führen, wobei X_1 und X_2 zwei mit den Parametern μ_1 und σ_1 bzw. μ_2 und σ_2 lognormal-verteilte Zufallsvariablen sind, d. h. X_1 und X_2 besitzen die Dichte

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i = 1, 2$.

- Weisen Sie nach, dass die Entscheidung zwischen den Anlagealternativen a_1 und a_2 von der Höhe des Anfangskapitals $K > 0$ unabhängig ist.
- Es gelte $\mu_1 = 0,09$, $\sigma_1 = 0,02$ und $\mu_2 = 0,08$. Für welche Werte von σ_2 wird der Entscheidungsträger die Anlagealternative a_2 wählen?

Hinweis: Es gilt

$$\mathbb{E}[X_i^{1/2}] = \exp\left(\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{8}\sigma_i^2\right).$$

- Es sei nun angenommen, für die beiden Anlagealternativen a_1 und a_2 gilt

$$\mathbb{E}[KX_1] = \mathbb{E}[KX_2] \quad \text{und} \quad \text{Var}(KX_1) < \text{Var}(KX_2).$$

Zeigen Sie, dass der Entscheidungsträger die Anlagealternative a_1 wählt, und interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Hinweis: Es gilt

$$\mathbb{E}[X_i] = \exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) \quad \text{und} \quad \text{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i]^2 \left(e^{\sigma_i^2} - 1\right).$$

Aufgabe 4*

Es sei

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

der beobachtete Schadendurchschnitt in einem Portfolio bestehend aus Privathaftpflichtversicherungsverträgen. Die Einzelschadenhöhen Y_1, \dots, Y_n seien unabhängig und identisch-verteilt mit $\mathbb{E}[Y_i] = \mu$, $\text{Var}(Y_i) = \sigma^2$ und dem Variationskoeffizienten

$$\text{Vko}(Y_i) := \frac{\sigma}{\mu} = 4.$$

Wie groß muss die Schadenanzahl n sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% der beobachtete Schadendurchschnitt \bar{Y} um weniger als $\delta = 10\%, 5\%, 3\%, 1\%$ von μ abweicht. Benutzen Sie zur (approximativen) Bestimmung von n den zentralen Grenzwertsatz.

*Zusatzaufgabe

Übung 2: Entscheidung unter Risiko II

Aufgabe 1

Zwei Entscheidungsträgern E_1 und E_2 wird ein Spiel X angeboten, das mit einer Wahrscheinlichkeit von 64% eine Auszahlung von 10 € und im anderen Fall keine Auszahlung liefert. Die beiden Entscheidungsträger E_1 und E_2 besitzen die Nutzenfunktionen

$$u_1(x) = 2x^2 + 5 \quad \text{bzw.} \quad u_2(x) = 4x^2 + 12 \quad \text{für } x \geq 0.$$

- Bestimmen Sie die Sicherheitsäquivalente $s_1(X)$ und $s_2(X)$ dieses Spiels für die Entscheidungsträger E_1 und E_2 .
- Erläutern Sie das Verhältnis der beiden Sicherheitsäquivalente $s_1(X)$ und $s_2(X)$.

Aufgabe 2

Ein Versicherer mit dem Vermögen $v_0 = 100$ (in Mio. €) und der Nutzenfunktion

$$u(x) = \ln(x)$$

hat ein Risiko X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 51 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

versichert.

- Welchen Betrag π_1 ist der Versicherer maximal bereit zu zahlen, damit ein Rückversicherer das Risiko zu 100% übernimmt?
- Wie hoch muss die Prämie π_2 mindestens sein, damit ein Rückversicherer mit dem Vermögen $v_0 = 650$ (in Mio. €) und derselben Nutzenfunktion $u = \ln(x)$ das Risiko zu 100% übernimmt?

Aufgabe 3

Betrachtet wird ein rationaler und risikoaverser Versicherungsnachfrager, der sich gegen ein Risiko versichern möchte, dessen Schadenhöhe L exponentialverteilt ist mit Parameter $\lambda = 0,01$, d. h. es gilt

$$f_L(l) = 0,01e^{-0,01 \cdot l}.$$

Der Versicherer berechnet seine Prämien gemäß dem proportionalen Prämienprinzip $P = (1 + \beta)\mathbb{E}[I(L)]$ mit dem Gewinn- und Kostenzuschlag $\beta = 20\%$. Ermitteln Sie den für den Versicherungsnachfrager optimalen Versicherungsschutz, wenn die Prämie $P = 12$ € betragen soll.

Aufgabe 4*

Betrachtet wird ein Versicherungsnehmer mit der Nutzenfunktion

$$u(x) = k \ln(x) \quad \text{für } x > 0 \quad \text{und} \quad k > 0$$

und dem Anfangsvermögen $v_0 > 1$, der dem Risiko gegenübersteht, einen auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilten Versicherungsschaden X zu erleiden, d. h. es gilt

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ermitteln Sie die Prämienhöhe π , welche der Versicherungsnehmer maximal für Versicherungsschutz zu bezahlen bereit ist.

Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.

*Zusatzaufgabe

Aufgabe 5*

Betrachtet werden n Entscheidungsträger mit den Anfangsvermögen v_i , den Risiken X_i und den logarithmischen Nutzenfunktionen

$$u_i(x) = \ln(x + a_i) \quad \text{mit } x > a_i$$

und $a_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Borch die Pareto-optimalen Risikoausweise und interpretieren Sie das Ergebnis.

*Zusatzaufgabe

Übung 3: Risikomaße I

Aufgabe 1

Ermitteln Sie für das Risiko X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\mathbb{P}(X = c) = \begin{cases} 0,80 & \text{für } c = 0 \\ 0,12 & \text{für } c = 50 \\ 0,04 & \text{für } c = 80 \\ 0,02 & \text{für } c = 90 \\ 0,02 & \text{für } c = 100 \end{cases}$$

anhand einer Skizze für die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ den Value-at-Risk zu den Sicherheitsniveaus $q = 0,95; 0,96; 0,98$ und $0,99$.

Aufgabe 2

Es sei $c \in (0, 1)$ und X ein Risiko mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ cx & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

- Bestimmen Sie den Value-at-Risk $\text{VaR}_q(X)$ zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$.
- Bestimmen Sie den Expected-Shortfall $\text{ES}_q(X)$ zum Sicherheitsniveau $q \in (0, c)$.

Aufgabe 3

Es sei X ein exponentialverteiltes Risiko mit dem Parameter $\lambda > 0$, d. h. X besitzt die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie

- analytisch den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall von X zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$ sowie
- mittels Excel (oder eines alternativen Tabellenkalkulationsprogramms) die Werte des Value-at-Risks und des Expected-Shortfalls für die Parameterwerte $\lambda = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5$ und Sicherheitsniveaus $q = 0,95; 0,99; 0,995$. Was ist zu beobachten?

Hinweis: Es gilt

$$\int \ln(1 - u) du = -(1 - u) \ln(1 - u) + (1 - u) + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4*

Das Risiko X sein $\text{LN}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt, d. h. X besitzt die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall von X zum Sicherheitsniveau $q \in (0, 1)$.

*Zusatzaufgabe

Übung 4: Risikomaße II

Aufgabe 1

Betrachtet wird ein Gesamtunternehmen $X = \sum_{i=1}^3 X_i$, das aus den drei Geschäftsbereichen X_1, X_2, X_3 besteht. Für den Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ gelte

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

wobei

$$\boldsymbol{\mu} = (10, 5, 5)^T, \quad \text{Var}(X_1) = 144, \quad \text{Var}(X_2) = 6,25, \quad \text{Var}(X_3) = 56,25$$

und die Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bekannt seien.

- Bestimmen Sie die Varianz-Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ von \mathbf{X} .
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .
- Ermitteln Sie für die drei einzelnen Geschäftsbereiche X_1, X_2, X_3 und das Gesamtunternehmen X jeweils den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau $q = 99,5\%$.

Aufgabe 2

Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastisch unabhängig und Bernoulli-verteilt mit dem Parameter $p = 0,006$, d. h. es gilt

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0,994 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0,006.$$

Weisen Sie damit nach, dass der Value-at-Risk i. A. kein subadditives Risikomaß ist. Verwenden Sie dabei das Sicherheitsniveau $q = 99\%$.

Aufgabe 3*

Prüfen Sie, ob das Risikomaß

$$\rho(X) = \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]}$$

mit $\mathbb{E}[X] \neq 0$ die Kohärenzaxiome „Monotonie“, „Translationsinvarianz“ und positive „Homogenität“ erfüllt.

Aufgabe 4*

Es sei S der Jahresschadenaufwand eines Versicherungsunternehmens und Y der Schadenaufwand eines von S stochastisch unabhängigen seltenen Extremszenarios. Es wird angenommen, dass S lognormal-verteilt ist mit

$$\mathbb{E}[S] = 2300 \text{ Mio. €} \quad \text{und} \quad \text{Vko}(S) = \frac{\sqrt{\text{Var}(S)}}{\mathbb{E}[S]} = 5\%.$$

Für das seltene Extremszenario wird ferner unterstellt, dass es durchschnittlich nur alle 500 Jahre eintritt und dann einen Schaden von 400 Mio. € verursacht.

- Ermitteln Sie das benötigte Risikokapital zum Sicherheitsniveau $q = 99\%$ für den Jahresschadenaufwand S für die beiden folgenden Fälle:

$$\text{i) } \text{RK}(S) = \text{VaR}_q(S - \mathbb{E}[S]) \quad (\text{sog. mean Value-at-Risk})$$

$$\text{ii) } \text{RK}(S) = \text{ES}_q(S - \mathbb{E}[S]) \quad (\text{sog. mean Expected-Shortfall})$$

- Berechnen Sie nun für den Fall i) das benötigte Risikokapital für den aggregierten Schadenaufwand $S + Y$.

Hinweis: Für $S \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ gilt $\mathbb{E}[S] = e^{\mu + \sigma^2/2}$, $\text{Var}(S) = (e^{\sigma^2} - 1)\mathbb{E}[S]^2$, $\text{VaR}_q(S) = e^{\mu + \sigma\Phi^{-1}(q)}$ und $\text{ES}_q(S) = \frac{1}{1-q} e^{\mu + \sigma^2/2} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(q))$

*Zusatzaufgabe

*Zusatzaufgabe

Übung 5: Allokationsverfahren

Aufgabe 1

Es sei erneut die Situation aus Übung 4, Aufgabe 1, gegeben. Berechnen Sie für die drei Geschäftsbereiche X_1, X_2, X_3 das jeweils resultierende Risikokapital

- bei Verwendung der Stand-alone-proportionalen Allokation und des Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q = 0,995$ als Risikomaß,
- bei Verwendung der inkrementellen Allokation und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0,995$ als Risikomaß (zuerst für X_1 , dann für X_2 und zum Schluss für X_3),
- bei Verwendung des (modifizierten) Kovarianzprinzips und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0,995$ als Risikomaß,
- bei Verwendung des Conditional-Tail-Expectation-Prinzips zum Sicherheitsniveau $q = 0,995$ und
- bei Verwendung des Euler-Prinzips und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0,995$ als Risikomaß.

Aufgabe 2

Betrachtet wird die Stand-alone-proportionale Allokation in Verbindung mit dem Risikomaß $\rho(X) = \text{Var}(X)$, d. h. die Risikokapitalien berechnen sich gemäß

$$\text{RK}(X_i) = \frac{\text{Var}(X_i)}{\sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j)} \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass es sich dabei im Falle von stochastisch unabhängigen Risiken um ein kohärentes Allokationsverfahren handelt.

Aufgabe 3

Weisen Sie nach, dass das Kovarianzprinzip in Verbindung mit einem Risikomaß $\rho(X)$ mit der Eigenschaft

$$\frac{\sqrt{\text{Var} \left(\sum_{i \in M} X_i \right)}}{\sqrt{\text{Var} \left(\sum_{j=1}^n X_j \right)}} \leq \frac{\rho \left(\sum_{i \in M} X_i \right)}{\rho \left(\sum_{j=1}^n X_j \right)} \quad \text{für alle } M \subseteq \{1, \dots, n\}$$

das Axiom „no undercut“ erfüllt.

Hinweis: Verwenden Sie dabei die Ungleichung

$$\text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}.$$

Aufgabe 4*

Bei den Marktrisiken einer Versicherungsgesellschaft wurden unter der Normalverteilungsannahme $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ für die einzelnen Risikokategorien X_i mittels

$$\text{RK}(X_i) = \text{ES}_q(X_i - \mathbb{E}[X_i])$$

(sog. mean Expected-Shortfall) für das Sicherheitsniveau $q = 99\%$ die folgenden Stand-alone-Risikokapitalien ermittelt:

	Zinsänderungsrisiko	Spreadrisiko	Aktienpreisrisiko	Währungsrisiko
RK(X_i)	195 Mio. €	60 Mio. €	210 Mio. €	75 Mio. €

- a) Bestimmen Sie das Risikokapital $\text{RK}(X)$ für das aggregierte Marktrisiko $X = \sum_{i=1}^4 X_i$ unter der vereinfachenden Annahme, dass die Risiken in den vier Kategorien X_i stochastisch unabhängig sind. Um wieviel Prozent ist dieses Risikokapital kleiner als die Summe der Stand-alone-Risikokapitalien $\text{RK}(X_i)$ (Diversifikationseffekt)?
- b) Führen Sie nun die gleiche Berechnung unter der realistischeren Annahme durch, dass zwischen den Risiken in den vier Kategorien die folgenden Korrelationen ρ_{ij} bestehen:

Korrelationsmatrix				
	Zinsänderungsrisiko	Spreadrisiko	Aktienpreisrisiko	Währungsrisiko
Zinsänderungsrisiko	1	-0,08	0,24	0,24
Spreadrisiko	-0,08	1	-0,37	-0,29
Aktienpreisrisiko	0,24	-0,37	1	0,37
Währungsrisiko	0,24	-0,29	0,37	1

*Zusatzaufgabe

Übung 6: Lineare und nichtlineare stochastische Abhängigkeiten

Aufgabe 1

Es sei $X \sim U[-1, 1]$ und $Y := X^2$, d. h. X besitzt die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- Weisen Sie nach, dass X und Y unkorreliert sind.
- Zeigen Sie, dass X und Y nicht stochastisch unabhängig sind.

Hinweis: Berechnen Sie hierzu die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq -1/4, Y \leq 1/4)$, $\mathbb{P}(X \leq -1/4)$ und $\mathbb{P}(Y \leq 1/4)$.

Aufgabe 2

Die folgende Tabelle enthält 10 Wertepaare mit Renditen der BMW- und Siemensaktie:

i	X_i (BMW-Aktie)	Y_i (Siemensaktie)
1	0,0030	-0,0051
2	0,0224	0,0072
3	-0,0059	-0,0055
4	0,0206	0,0017
5	-0,0058	0,0160
6	-0,0118	-0,0013
7	0,0064	0,0219
8	0,0039	0,0016
9	-0,0015	-0,0156
10	-0,0238	-0,0222

- Berechnen Sie den empirischen linearen Korrelationskoeffizienten $r(X, Y)$.
- Bestimmen Sie den Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall $r_\tau(X, Y)$.
- Ermitteln Sie den Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman $r_S(X, Y)$.

Aufgabe 3*

Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ sei bivariat normalverteilt mit dem Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und der Varianz-Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

d. h. $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

- Geben Sie die Randverteilungen der Zufallsvariablen X_1 und X_2 an.
- Dominiert eine der Zufallsvariablen X_1 bzw. X_2 die andere stochastisch? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- Sind die Zufallsvariablen X_1 und X_2 stochastisch abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 > 8)$.
- Bestimmen Sie die Verteilung der affin-linearen Transformation $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

*Zusatzaufgabe

Aufgabe 4*

Es gelte $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y := X^2$.

- a) Bestimmen Sie den linearen Korrelationskoeffizienten von Pearson $\rho(X, Y)$.
- b) Berechnen Sie den unteren und oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten $\lambda_l(X, Y)$ bzw. $\lambda_u(X, Y)$.
- c) Interpretieren Sie kurz die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen a) und b).

Übung 7: Schadenanzahl- und Schadenhöhenverteilungen, Modellanpassung I

Aufgabe 1

Die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n seien stochastisch unabhängig und identisch-verteilt mit der Dichtefunktion

$$f_Y(y) = \begin{cases} \exp(-(y - \delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Schätzer für δ erwartungstreu und/oder konsistent sind.

a) Das arithmetische Mittel:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

b) Der Schätzer \hat{Y} mit der Dichtefunktion:

$$f_{\hat{Y}}(y) = \begin{cases} n \exp(-n(y - \delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2

Es gelte $N \sim \text{Bin}(n, p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{X} = \frac{N}{n}$ ein erwartungstreuer Schätzer für p ist.

b) Untersuchen Sie, ob $\hat{Y} = n\hat{X}(1 - \hat{X})$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\text{Var}(N)$ ist.

Aufgabe 3

Es sei \hat{X}_1 ein Schätzer für den Parameter $\theta \in (a, b)$ mit Dichtefunktion $f_{\hat{X}}$ und durch

$$\hat{X}_2 = \begin{cases} a & \text{für } \hat{X}_1 \leq a \\ \hat{X}_1 & \text{für } \hat{X}_1 \in (a, b) \\ b & \text{für } \hat{X}_1 \geq b \end{cases}$$

sei ein weiterer Schätzer für θ definiert.

a) Weisen Sie nach, dass $\text{MSE}_{\hat{X}_1}(\theta) \geq \text{MSE}_{\hat{X}_2}(\theta)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass auch $\text{Var}(\hat{X}_1) \geq \text{Var}(\hat{X}_2)$ gilt, falls der Schätzer \hat{X}_1 zusätzlich erwartungstreu ist.

Aufgabe 4*

Die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n seien stochastisch unabhängig und $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt.

a) Weisen Sie nach, dass $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \Gamma(n, \lambda)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\lambda Y \sim \Gamma(n, 1)$ für $\lambda > 0$ gilt.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) und b) das $100(1 - \alpha)\%$ -Konfidenzintervall für λ .

*Zusatzaufgabe

Übung 8: Modellanpassung II

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer und der Momentenschätzer einer $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung mit $\lambda > 0$ durch $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{Y}}$ mit $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ gegeben ist.

Aufgabe 2

Von einer $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariable X liegen die Beobachtungen 0,47, 0,49, 0,91, 1,00, 2,47, 5,03 und 16,09 vor. Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzungen für das 25%-Quantil $x(0,25)$.

Aufgabe 3

Es sei X eine Zufallsvariable, deren Verteilung eine Mischung ist, die zu 40% aus einer $\text{Exp}(\lambda_1)$ - und zu 60% aus einer $\text{Exp}(\lambda_2)$ -Verteilung besteht. Es sei weiter bekannt, dass $\mathbb{E}[X] = 4$ und $\text{Var}(X) = 22$ gilt. Bestimmen Sie die Momentenschätzer für die Parameter λ_1 und λ_2 .

Aufgabe 4

Es seien $x'(p_1)$ und $x'(p_2)$ mit $0 < p_1, p_2 < 1$ die empirischen p_1 - und p_2 -Quantile einer Weibull(a, b)-Verteilung. Bestimmen Sie Schätzer für die beiden Parameter a und b so, dass die empirischen und theoretischen p_1 - und p_2 -Quantile übereinstimmen (sog. Quantilmethode).

Aufgabe 5*

Im ersten Schadenjahr gab es 100 Versicherungsschäden mit einer durchschnittlichen Schadenhöhe von 10.000 € und im zweiten Schadenjahr waren es 200 Versicherungsschäden mit einer durchschnittlichen Schadenhöhe von 12.500 €. Die jährliche Inflationsrate beträgt 10% und die Schadenhöhen folgen einer $\text{Par}(3, \lambda)$ -Verteilung. Bestimmen Sie die Momentenschätzung für den Parameter λ für das dritte Schadenjahr.

Aufgabe 6*

Gilt $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$, dann besitzt $X = Y^{-1}$ eine sogenannte Inverse- $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X .
- Ermitteln Sie den Median und den Modalwert von X .
- Für X wurden die drei Schadenhöhen 186, 91 und 66 beobachtet und von sieben weiteren Schadenhöhen ist bekannt, dass sie gleich oder kleiner als 60 sind. Berechnen Sie die ML-Schätzung für den Modalwert.

*Zusatzaufgabe

*Zusatzaufgabe

Übung 9: Modellüberprüfung

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Daten:

i	1	2	3	4	5
x_i	1	2	3	7	12

- Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion formal an.
- Skizzieren Sie zu den gegebenen Daten einen Boxplot und interpretieren Sie diesen.
- Passen Sie an die gegebenen Daten eine Exponentialverteilung mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode an.
Hinweis: Verwenden Sie dabei das Resultat aus der Übung 8, Aufgabe 1.
- Beurteilen Sie die Güte der angepassten Verteilung mit Hilfe eines Kolmogorov-Smirnov-Tests zu einem Signifikanzniveau von 5%.

Aufgabe 2

Über die letzten 20 Jahre wurden im Bereich der Naturgefahren folgende Anzahlen von Elementar-Großschadeneignissen (d. h. Schäden durch Sturm, Hagel, Überschwemmung, Erdbeben, Lawinen mit einer Höhe von mehr als 10 Mio. €) beobachtet:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl N_i	0	1	1	2	4	1	0	2	1	2	2	1	0	1	1	0	4	3	1	2

Testen Sie mittels eines χ^2 -Anpassungstests die Nullhypothese

$$H_0 : N_i \sim \Pi(\lambda)$$

bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$.

Aufgabe 3*

In einem Hausratsversicherungsportfolio wurden die folgenden 40 (nach Größe geordneten) Schadenhöhen y_1, \dots, y_{40} beobachtet:

10	11	15	22	28	30	32	36	38	48
51	55	56	68	68	85	87	94	103	104
105	106	109	119	121	137	178	181	226	287
310	321	354	393	438	591	1045	1210	1212	2423

- Bestimmen Sie den Mittelwert sowie die 25%-, 50%- und 75%-Quantile der empirischen Verteilung.
- Stellen Sie die empirische Schadenhöhenverteilungsfunktion, das Histogramm, den Boxplot und den Cullen-Frey-Graph dar und interpretieren Sie diese Abbildungen.
- Passen Sie an den Datensatz eine Gamma-, Lognormal-, Loggamma-, Weibull- und Pareto-Verteilung mittels Momenten- und Maximum-Likelihood-Methode an.
- Beurteilen Sie die Anpassungsgüte der angepassten Verteilungen mit Hilfe von CDF-, QQ- und log-log-Plots.
- Beurteilen Sie die Anpassungsgüte der angepassten Verteilungen mit Hilfe des Kolmogorov-Smirnov-Tests.
- Beurteilen Sie die Anpassungsgüte der angepassten Verteilungen mit Hilfe des χ^2 -Anpassungstests. Zerlegen Sie hierzu die Hausratsdaten anhand der angepassten $\text{Par}(\hat{\alpha}^{ML}, \hat{\lambda}^{ML})$ -Verteilung in $r = 5$ gleichwahrscheinliche Intervalle $I_j = (c_{j-1}, c_j]$.
- Beurteilen Sie anhand des Akaike- und des Bayesianisches-Informationskriteriums die Anpassungsgüte der mit Hilfe der ML-Methode angepassten fünf Verteilungen.

*Zusatzaufgabe

Aufgabe 4*

Bei der Tarifierung in der Elementarschadenversicherung (d. h. gegen Sturm, Hagel, Überschwemmung, Erdbeben, Lawinen Vulkanausbrüche) wird zwischen Normalschadenereignissen (Schadenhöhe < 50 Mio. €) und Großschadenereignissen (Schadenhöhe ≥ 50 Mio. €) unterschieden. In den Jahren 1986 bis 2005 wurden die folgenden 15 Großschadenereignisse beobachtet (Indexierung der Schadenhöhen auf 2005):

Datum	Schadenhöhe Y in Mio. €
20.06.1986	52,8
18.08.1986	135,2
18.07.1987	55,9
23.08.1987	138,6
26.02.1990	122,9
21.08.1992	55,8
24.09.1993	368,2
08.10.1993	83,8
18.05.1994	78,5
18.02.1999	75,3
12.05.1999	178,3
26.12.1999	182,8
04.07.2000	54,4
13.10.2000	365,3
20.08.2005	1051,1

- Passen Sie an die Großschadendaten Y eine europäische Pareto-Verteilung $\text{Par}^*(\alpha, u)$ mit Threshold $u = 50$ Mio. € an. Verwenden Sie zur Schätzung des Shapeparameters α den modifizierten (erwartungstreuen) ML-Schätzer $\hat{\alpha}_*^{ML}$. Machen Sie hierbei auch eine Angabe über die Genauigkeit von $\hat{\alpha}_*^{ML}$ mittels $\text{Vko}(\hat{\alpha}_*^{ML})$.
- Überprüfen Sie die Anpassungsgüte mittels eines CDF-, log-log- und QQ-Plots.
- Die Schadenhöhe Y eines einzelnen Schadenereignisses sei nun durch eine Limite $M = 2$ Mrd. € nach oben begrenzt. Berechnen Sie die erwartete Schadenhöhe bei einem einzelnen Großschadenereignis unter der Annahme, dass die Schadenhöhe Y die im Aufgabenteil a) angepasste europäische Pareto-Verteilung besitzt. Ermitteln Sie damit auch eine Schätzung für den erwarteten jährlichen Großschadenaufwand.
- Zusätzlich zu den Annahmen im Aufgabenteil c) sei angenommen, dass N_M die Anzahl von Großschadenereignissen pro Jahr ist, welche die Limite $M = 2$ Mrd. € überschreiten, und $N_M \sim \Pi(\lambda_M)$ gilt. Ermitteln Sie eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr die Limite von $M = 2$ Mrd. € zur Anwendung kommt, sowie für die Wiederkehrperiode eines Großschadenereignisses, das die Limite überschreitet (d. h. die Länge des Zeitintervalls zwischen zwei Großschadenereignissen, welche die Limite übersteigen).

*Zusatzaufgabe

Übung 10: Simulationsverfahren

Aufgabe 1

Der Gesamtschaden eines Versicherungsportfolios sei gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

wobei die Schadenanzahl N und die identisch-verteilten Einzelschadenhöhen X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängig sind und

$$\mathbb{P}(N = n) = 0,9 \cdot 0,1^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$f_X(x) = 0,01 \cdot e^{-0,01} \quad \text{für } x > 0$$

gilt. Die Simulation der Zufallsvariablen N und X_1, X_2, \dots erfolge mittels der Inversionsmethode und den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $U \sim U[0, 1]$ und $V_1, \dots, V_n \sim U[0, 1]$. Ermitteln Sie den resultierenden Gesamtschaden S , wenn für die Zufallsvariablen U, V_1, V_2, \dots die folgenden Pseudozufallszahlen generiert wurden:

$$u = 0,05, \quad v_1 = 0,3, \quad v_2 = 0,22, \quad v_3 = 0,52, \quad v_4 = 0,46$$

Aufgabe 2

Der Gesamtschaden eines Versicherungsportfolios sei gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

wobei die Schadenanzahl N und die identisch-verteilten Einzelschadenhöhen X_1, X_2, \dots, X_n stochastisch unabhängig sind. Weiterhin gelte

$$\mathbb{P}(N = n) = \begin{cases} \frac{2^n}{n!} e^{-2} & \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$F_X(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}; \mu \in \mathbb{R}, \beta > 0.$$

Die Simulation der Zufallsvariablen N und X_1, X_2, \dots, X_n erfolge mittels der Inversionsmethode und den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $U \sim U[0, 1]$ und $V_1, \dots, V_n \sim U[0, 1]$.

- Ermitteln Sie die resultierende Schadenanzahl N , wenn für die Zufallsvariable U die Pseudozufallszahl $u = 0,8$ generiert wurde.
- Erzeugen Sie mit dem linearen Kongruenzgenerator drei Pseudozufallszahlen. Verwenden Sie dabei die Konstanten $a = 18$, $c = 11$, $m = 100$ und den Keim $x_0 = 40$.
- Ermitteln Sie den resultierenden Gesamtschaden S unter Verwendung der in a) ermittelten Schadenanzahl und der in b) erzeugten Pseudozufallszahlen, für den Fall, dass $\mu = 1$ und $\beta = 2$ gilt.

Aufgabe 3

Betrachtet wird eine Verteilungsfunktion $F(x)$ mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{für } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Verwerfungsmethode und der Hilfsdichte

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

einen Algorithmus zur Erzeugung von F -verteilten Pseudozufallszahlen.

b) Bestimmen Sie die Effizienz dieses Algorithmus.

Aufgabe 4*

Der Gesamtschaden eines Versicherungsportfolios sei gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

wobei die Schadenanzahl N und die identisch-verteilten Einzelschadenshöhen X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängig sind und

n	$F_N(n)$
0	0,125
1	0,312
2	0,500
3	0,656
4	0,773
5	0,855
\vdots	\vdots

bzw.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/200)^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Zusätzlich wird angenommen, dass pro Schaden der gedeckte Höchstschaden $l = 650$ beträgt und ein Selbstbehalt von $d = 150$ existiert. Der nun resultierende Gesamtschaden wird mit \tilde{S} bezeichnet. Die Simulation der Zufallsvariablen N und X_1, X_2, \dots erfolge mittels der Inversionsmethode und den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $U \sim U[0, 1]$ und $V_1, \dots, V_n \sim U[0, 1]$.

Ermitteln Sie unter Berücksichtigung des gedeckten Höchstschadens $l = 650$ und Selbstbehalts $d = 150$ pro Schaden den resultierenden Gesamtschaden \tilde{S} , wenn für die Zufallsvariablen U, V_1, V_2, \dots die folgenden Pseudozufallszahlen generiert wurden:

$$u = 0,7654, v_1 = 0,2738, v_2 = 0,5152, v_3 = 0,7537, v_4 = 0,6481, v_5 = 0,3153$$

Aufgabe 5*

Es gelte $X := U^2$ und $Y := (1 - U)^2$ mit $U \sim U[0, 1]$.

a) Berechnen Sie $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Cov}(X, Y)$ und $\text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right)$.

b) Bestimmen Sie eine (naive) Monte-Carlo-Schätzung für das Integral

$$\int_0^1 u^2 du \quad (1)$$

unter Verwendung von 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $U_1, \dots, U_{100} \sim U[0, 1]$. Ermitteln Sie ferner eine Schätzung für die Varianz dieser Monte-Carlo-Schätzung.

c) Zeigen Sie, wie die Monte-Carlo-Schätzung aus Aufgabenteil b) verbessert werden kann, wenn weiterhin nur die 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $U_1, \dots, U_{100} \sim U[0, 1]$ aus Aufgabenteil b) zur Verfügung stehen.

*Zusatzaufgabe

*Zusatzaufgabe

Aufgabe 6*

Betrachtet wird das Integral

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e - 1} dx. \quad (2)$$

- a) Ermitteln Sie für das Integral (2) eine (naive) Monte-Carlo-Schätzung unter Verwendung von 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $X_1, \dots, X_{100} \sim U[0, 1]$.
- b) Bestimmen Sie eine Monte-Carlo-Schätzung für (2) unter Verwendung von 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen $X_1, \dots, X_{100} \sim U[0, 1]$ und 100 zusätzlichen antithetischen Pseudozufallszahlen $X_{101}, \dots, X_{200} \sim U[0, 1]$.
- c) Bestimmen Sie nun eine Monte-Carlo-Schätzung für (2) unter Verwendung von $X_1, \dots, X_{100} \sim U[0, 1]$ und der Hilfsfunktion $h(x) := \frac{x}{e-1}$ für $x \in [0, 1]$.
- d) Vergleichen Sie die drei Monte-Carlo-Schätzungen aus den Aufgabenteilen a) bis c).

*Zusatzaufgabe