

## Übung 1: Entscheidung unter Risiko I

### Aufgabe 1 (Sankt-Petersburg-Paradoxon)

Die Zufallsvariable  $N$  gibt die Anzahl der benötigten Versuche an, bis beim Werfen einer fairen Münze zum ersten Mal „Kopf“ auftritt.

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f_N$  von  $N$ .
- Berechnen Sie  $\mathbb{E}[N]$  und  $\text{Var}(N)$ .
- Bestimmen Sie den Erwartungsnutzen von  $X = 2^N$ , wenn die Nutzenfunktion  $u(x) = \ln(x)$  zugrunde gelegt wird.

### Aufgabe 2

Einem Entscheidungsträger mit der Nutzenfunktion

$$u(x) = -\frac{x^2}{100.000} + 2x$$

werden zwei Alternativen angeboten. Bei der ersten Alternative  $a_1$  beträgt der Gewinn 20.000 € oder 40.000 € jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%. Bei der zweiten Alternative  $a_2$  kommt jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% ein Gewinn von  $x$  € oder 0 € zur Auszahlung. Wie hoch muss bei der zweiten Alternative der Gewinn  $x$  sein, damit der Entscheidungsträger zwischen den beiden Alternativen indifferent ist?

### Aufgabe 3

Betrachtet wird ein Entscheidungsträger, der das Anfangskapital  $K > 0$  investieren möchte und die Nutzenfunktion

$$u(x) = \sqrt{x} \quad \text{für } x \geq 0$$

besitzt. Zur Auswahl stehen ihm zwei verschiedene Anlagealternativen  $a_1$  und  $a_2$ , welche am Ende des Anlagezeitraums zum Endkapital  $KX_1$  bzw.  $KX_2$  führen, wobei  $X_1$  und  $X_2$  zwei mit den Parametern  $\mu_1$  und  $\sigma_1$  bzw.  $\mu_2$  und  $\sigma_2$  lognormal-verteilte Zufallsvariablen sind, d. h.  $X_1$  und  $X_2$  besitzen die Dichte

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $i = 1, 2$ .

- Weisen Sie nach, dass die Entscheidung zwischen den Anlagealternativen  $a_1$  und  $a_2$  von der Höhe des Anfangskapitals  $K > 0$  unabhängig ist.
- Es gelte  $\mu_1 = 0,09$ ,  $\sigma_1 = 0,02$  und  $\mu_2 = 0,08$ . Für welche Werte von  $\sigma_2$  wird der Entscheidungsträger die Anlagealternative  $a_2$  wählen?

Hinweis: Es gilt

$$\mathbb{E}[X_i^{1/2}] = \exp\left(\frac{1}{2}\mu_i + \frac{1}{8}\sigma_i^2\right).$$

- Es sei nun angenommen, für die beiden Anlagealternativen  $a_1$  und  $a_2$  gilt

$$\mathbb{E}[KX_1] = \mathbb{E}[KX_2] \quad \text{und} \quad \text{Var}(KX_1) < \text{Var}(KX_2).$$

Zeigen Sie, dass der Entscheidungsträger die Anlagealternative  $a_1$  wählt, und interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Hinweis: Es gilt

$$\mathbb{E}[X_i] = \exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) \quad \text{und} \quad \text{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i]^2 \left(e^{\sigma_i^2} - 1\right).$$

#### Aufgabe 4

Es sei

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

der beobachtete Schadendurchschnitt in einem Portfolio bestehend aus Privathaftpflichtversicherungsverträgen. Die Einzelschadenhöhen  $Y_1, \dots, Y_n$  seien unabhängig und identisch-verteilt mit  $\mathbb{E}[Y_i] = \mu$ ,  $\text{Var}(Y_i) = \sigma^2$  und dem Variationskoeffizienten

$$\text{Vko}(Y_i) := \frac{\sigma}{\mu} = 4.$$

Wie groß muss die Schadenanzahl  $n$  sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% der beobachtete Schadendurchschnitt  $\bar{Y}$  um weniger als  $\delta = 10\%, 5\%, 3\%, 1\%$  von  $\mu$  abweicht. Benutzen Sie zur (approximativen) Bestimmung von  $n$  den zentralen Grenzwertsatz.

## Übung 2: Entscheidung unter Risiko II

### Aufgabe 1

Zwei Entscheidungsträgern  $E_1$  und  $E_2$  wird ein Spiel  $X$  angeboten, das mit einer Wahrscheinlichkeit von 64% eine Auszahlung von 10 € und im anderen Fall keine Auszahlung liefert. Die beiden Entscheidungsträger  $E_1$  und  $E_2$  besitzen die Nutzenfunktionen

$$u_1(x) = 2x^2 + 5 \quad \text{bzw.} \quad u_2(x) = 4x^2 + 12 \quad \text{für } x \geq 0.$$

- Bestimmen Sie die Sicherheitsäquivalente  $s_1(X)$  und  $s_2(X)$  dieses Spiels für die Entscheidungsträger  $E_1$  und  $E_2$ .
- Erläutern Sie das Verhältnis der beiden Sicherheitsäquivalente  $s_1(X)$  und  $s_2(X)$ .

### Aufgabe 2

Ein Versicherer mit dem Vermögen  $v_0 = 100$  (in Mio. €) und der Nutzenfunktion

$$u(x) = \ln(x) \quad \text{für } x > 0$$

hat ein Risiko  $X$  mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 51 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

versichert.

- Welchen Betrag  $\pi_1$  ist der Versicherer maximal bereit zu zahlen, damit ein Rückversicherer das Risiko zu 100% übernimmt?
- Wie hoch muss die Prämie  $\pi_2$  mindestens sein, damit ein Rückversicherer mit dem Vermögen  $v_0 = 650$  (in Mio. €) und derselben Nutzenfunktion  $u = \ln(x)$  das Risiko zu 100% übernimmt?

### Aufgabe 3

Betrachtet wird ein rationaler und risikoaverser Versicherungsnachfrager, der sich gegen ein Risiko versichern möchte, dessen Schadenhöhe  $L$  exponentialverteilt ist mit Parameter  $\lambda = 0,01$ , d. h. es gilt

$$f_L(l) = 0,01e^{-0,01 \cdot l}.$$

Der Versicherer berechnet seine Prämien gemäß dem proportionalen Prämienprinzip  $P = (1 + \beta)\mathbb{E}[I(L)]$  mit dem Gewinn- und Kostenzuschlag  $\beta = 20\%$ . Ermitteln Sie den für den Versicherungsnachfrager optimalen Versicherungsschutz, wenn die Prämie  $P = 12$  € betragen soll.

### Aufgabe 4

Betrachtet wird ein Versicherungsnehmer mit der Nutzenfunktion

$$u(x) = k \ln(x) \quad \text{für } x > 0 \quad \text{und } k > 0$$

und dem Anfangsvermögen  $v_0 > 1$ , der dem Risiko gegenübersteht, einen auf dem Intervall  $[0, 1]$  gleichverteilten Versicherungsschaden  $X$  zu erleiden, d. h. es gilt

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ermitteln Sie die Prämienhöhe  $\pi$ , welche der Versicherungsnehmer maximal für Versicherungsschutz zu bezahlen bereit ist.

Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.

### Aufgabe 5

Betrachtet werden  $n$  Entscheidungsträger mit den Anfangsvermögen  $v_i$ , den Risiken  $X_i$  und den logarithmischen Nutzenfunktionen

$$u_i(x) = \ln(x + a_i) \quad \text{mit } x > a_i$$

und  $a_i > 0$  für  $i = 1, \dots, n$ . Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Borch die Pareto-optimalen Risikoaustausche und interpretieren Sie das Ergebnis.

## Übung 3: Risikomaße I

### Aufgabe 1

Ermitteln Sie für das Risiko  $X$  mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$\mathbb{P}(X = c) = \begin{cases} 0,80 & \text{für } c = 0 \\ 0,12 & \text{für } c = 50 \\ 0,04 & \text{für } c = 80 \\ 0,02 & \text{für } c = 90 \\ 0,02 & \text{für } c = 100 \end{cases}$$

anhand einer Skizze für die Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  den Value-at-Risk zu den Sicherheitsniveaus  $q = 0,95; 0,96; 0,98$  und  $0,99$ .

### Aufgabe 2

Es sei  $c \in (0, 1)$  und  $X$  ein Risiko mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ cx & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

- Bestimmen Sie den Value-at-Risk  $\text{VaR}_q(X)$  zum Sicherheitsniveau  $q \in (0, 1)$ .
- Bestimmen Sie den Expected-Shortfall  $\text{ES}_q(X)$  zum Sicherheitsniveau  $q \in (0, c)$ .

### Aufgabe 3

Es sei  $X$  ein exponentialverteiltes Risiko mit dem Parameter  $\lambda > 0$ , d. h.  $X$  besitzt die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie

- analytisch den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall von  $X$  zum Sicherheitsniveau  $q \in (0, 1)$  sowie
- mittels Excel (oder eines alternativen Tabellenkalkulationsprogramms) die Werte des Value-at-Risks und des Expected-Shortfalls für die Parameterwerte  $\lambda = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5$  und Sicherheitsniveaus  $q = 0,95; 0,99; 0,995$ . Was ist zu beobachten?

Hinweis: Es gilt

$$\int \ln(1 - u) du = -(1 - u) \ln(1 - u) + (1 - u) + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

### Aufgabe 4

Das Risiko  $X$  sein  $\text{LN}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt, d. h.  $X$  besitzt die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall von  $X$  zum Sicherheitsniveau  $q \in (0, 1)$ .

## Übung 4: Risikomaße II

### Aufgabe 1

Betrachtet wird ein Gesamtunternehmen  $X = \sum_{i=1}^3 X_i$ , das aus den drei Geschäftsbereichen  $X_1, X_2, X_3$  besteht. Für den Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$  gelte

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

wobei

$$\boldsymbol{\mu} = (10, 5, 5)^T, \quad \text{Var}(X_1) = 144, \quad \text{Var}(X_2) = 6,25, \quad \text{Var}(X_3) = 56,25$$

und die Korrelationsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bekannt seien.

- Bestimmen Sie die Varianz-Kovarianzmatrix  $\boldsymbol{\Sigma}$  von  $\mathbf{X}$ .
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $X$ .
- Ermitteln Sie für die drei einzelnen Geschäftsbereiche  $X_1, X_2, X_3$  und das Gesamtunternehmen  $X$  jeweils den Value-at-Risk und den Expected-Shortfall zum Sicherheitsniveau  $q = 99,5\%$ .

### Aufgabe 2

Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  seien stochastisch unabhängig und Bernoulli-verteilt mit dem Parameter  $p = 0,006$ , d. h. es gilt

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0,994 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0,006.$$

Weisen Sie damit nach, dass der Value-at-Risk i. A. kein subadditives Risikomaß ist. Verwenden Sie dabei das Sicherheitsniveau  $q = 99\%$ .

### Aufgabe 3

Prüfen Sie, ob das Risikomaß

$$\rho(X) = \frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}[X]}$$

mit  $\mathbb{E}[X] \neq 0$  die Kohärenzaxiome „Monotonie“, „Translationsinvarianz“ und positive „Homogenität“ erfüllt.

### Aufgabe 4

Es sei  $S$  der Jahresschadenaufwand eines Versicherungsunternehmens und  $Y$  der Schadenaufwand eines von  $S$  stochastisch unabhängigen seltenen Extremszenarios. Es wird angenommen, dass  $S$  lognormal-verteilt ist mit

$$\mathbb{E}[S] = 2300 \text{ Mio. €} \quad \text{und} \quad \text{Vko}(S) = \frac{\sqrt{\text{Var}(S)}}{\mathbb{E}[S]} = 5\%.$$

Für das seltene Extremszenario wird ferner unterstellt, dass es durchschnittlich nur alle 500 Jahre eintritt und dann einen Schaden von 400 Mio. € verursacht.

- Ermitteln Sie das benötigte Risikokapital zum Sicherheitsniveau  $q = 99\%$  für den Jahresschadenaufwand  $S$  für die beiden folgenden Fälle:
  - $\text{RK}(S) = \text{VaR}_q(S - \mathbb{E}[S])$  (sog. mean Value-at-Risk)
  - $\text{RK}(S) = \text{ES}_q(S - \mathbb{E}[S])$  (sog. mean Expected-Shortfall)

b) Berechnen Sie nun für den Fall i) das benötigte Risikokapital für den aggregierten Schadenaufwand  $S + Y$ .

**Hinweis:** Für  $S \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$  gilt  $\mathbb{E}[S] = e^{\mu + \sigma^2/2}$ ,  $\text{Var}(S) = (e^{\sigma^2} - 1)\mathbb{E}[S]^2$ ,  $\text{VaR}_q(S) = e^{\mu + \sigma\Phi^{-1}(q)}$  und  $\text{ES}_q(S) = \frac{1}{1-q} e^{\mu + \sigma^2/2} \Phi(\sigma - \Phi^{-1}(q))$

## Übung 5: Allokationsverfahren

### Aufgabe 1

Es sei erneut die Situation aus Übung 4, Aufgabe 1, gegeben. Berechnen Sie für die drei Geschäftsbereiche  $X_1, X_2, X_3$  das jeweils resultierende Risikokapital

- bei Verwendung der Stand-alone-proportionalen Allokation und des Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau  $q = 0,995$  als Risikomaß,
- bei Verwendung der inkrementellen Allokation und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau  $q = 0,995$  als Risikomaß (zuerst für  $X_1$ , dann für  $X_2$  und zum Schluss für  $X_3$ ),
- bei Verwendung des (modifizierten) Kovarianzprinzips und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau  $q = 0,995$  als Risikomaß,
- bei Verwendung des Conditional-Tail-Expectation-Prinzips zum Sicherheitsniveau  $q = 0,995$  und
- bei Verwendung des Euler-Prinzips und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau  $q = 0,995$  als Risikomaß.

### Aufgabe 2

Betrachtet wird die Stand-alone-proportionale Allokation in Verbindung mit dem Risikomaß  $\rho(X) = \text{Var}(X)$ , d. h. die Risikokapitalien berechnen sich gemäß

$$\text{RK}(X_i) = \frac{\text{Var}(X_i)}{\sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j)} \text{Var} \left( \sum_{j=1}^n X_j \right) \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass es sich dabei im Falle von stochastisch unabhängigen Risiken um ein kohärentes Allokationsverfahren handelt.

### Aufgabe 3

Weisen Sie nach, dass das Kovarianzprinzip in Verbindung mit einem Risikomaß  $\rho(X)$  mit der Eigenschaft

$$\frac{\sqrt{\text{Var} \left( \sum_{i \in M} X_i \right)}}{\sqrt{\text{Var} \left( \sum_{j=1}^n X_j \right)}} \leq \frac{\rho \left( \sum_{i \in M} X_i \right)}{\rho \left( \sum_{j=1}^n X_j \right)} \quad \text{für alle } M \subseteq \{1, \dots, n\}$$

das Axiom „no undercut“ erfüllt.

Hinweis: Verwenden Sie dabei die Ungleichung

$$\text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)}.$$

#### Aufgabe 4

Bei den Marktrisiken einer Versicherungsgesellschaft wurden unter der Normalverteilungsannahme  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$  für die einzelnen Risikokategorien  $X_i$  mittels

$$\text{RK}(X_i) = \text{ES}_q(X_i - \mathbb{E}[X_i])$$

(sog. mean Expected-Shortfall) für das Sicherheitsniveau  $q = 99\%$  die folgenden Stand-alone-Risikokapitalien ermittelt:

	Zinsänderungsrisiko	Spreadrisiko	Aktienpreisrisiko	Währungsrisiko
RK( $X_i$ )	195 Mio. €	60 Mio. €	210 Mio. €	75 Mio. €

- a) Bestimmen Sie das Risikokapital  $\text{RK}(X)$  für das aggregierte Marktrisiko  $X = \sum_{i=1}^4 X_i$  unter der vereinfachenden Annahme, dass die Risiken in den vier Kategorien  $X_i$  stochastisch unabhängig sind. Um wieviel Prozent ist dieses Risikokapital kleiner als die Summe der Stand-alone-Risikokapitalien  $\text{RK}(X_i)$  (Diversifikationseffekt)?
- b) Führen Sie nun die gleiche Berechnung unter der realistischeren Annahme durch, dass zwischen den Risiken in den vier Kategorien die folgenden Korrelationen  $\rho_{ij}$  bestehen:

Korrelationsmatrix				
	Zinsänderungsrisiko	Spreadrisiko	Aktienpreisrisiko	Währungsrisiko
Zinsänderungsrisiko	1	-0,08	0,24	0,24
Spreadrisiko	-0,08	1	-0,37	-0,29
Aktienpreisrisiko	0,24	-0,37	1	0,37
Währungsrisiko	0,24	-0,29	0,37	1

## Übung 6: Lineare und nichtlineare stochastische Abhängigkeiten

### Aufgabe 1

Es sei  $X \sim U[-1, 1]$  und  $Y := X^2$ , d. h.  $X$  besitzt die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- Weisen Sie nach, dass  $X$  und  $Y$  unkorreliert sind.
- Zeigen Sie, dass  $X$  und  $Y$  nicht stochastisch unabhängig sind.

Hinweis: Berechnen Sie hierzu die Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(X \leq -1/4, Y \leq 1/4)$ ,  $\mathbb{P}(X \leq -1/4)$  und  $\mathbb{P}(Y \leq 1/4)$ .

### Aufgabe 2

Die folgende Tabelle enthält 10 Wertepaare mit Renditen der BMW- und Siemensaktie:

$i$	$X_i$ (BMW-Aktie)	$Y_i$ (Siemensaktie)
1	0,0030	-0,0051
2	0,0224	0,0072
3	-0,0059	-0,0055
4	0,0206	0,0017
5	-0,0058	0,0160
6	-0,0118	-0,0013
7	0,0064	0,0219
8	0,0039	0,0016
9	-0,0015	-0,0156
10	-0,0238	-0,0222

- Berechnen Sie den empirischen linearen Korrelationskoeffizienten  $r(X, Y)$ .
- Bestimmen Sie den Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall  $r_\tau(X, Y)$ .
- Ermitteln Sie den Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman  $r_S(X, Y)$ .

### Aufgabe 3

Der Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$  sei bivariat normalverteilt mit dem Erwartungswertvektor  $\boldsymbol{\mu}$  und der Varianz-Kovarianzmatrix  $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

d. h.  $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ .

- Geben Sie die Randverteilungen der Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  an.
- Dominiert eine der Zufallsvariablen  $X_1$  bzw.  $X_2$  die andere stochastisch? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- Sind die Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  stochastisch abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(X_1 > 8)$ .
- Bestimmen Sie die Verteilung der affin-linearen Transformation  $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

#### Aufgabe 4

Es gelte  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  und  $Y := X^2$ .

- a) Bestimmen Sie den linearen Korrelationskoeffizienten von Pearson  $\rho(X, Y)$ .
- b) Berechnen Sie den unteren und oberen Tailabhängigkeitskoeffizienten  $\lambda_l(X, Y)$  bzw.  $\lambda_u(X, Y)$ .
- c) Interpretieren Sie kurz die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen a) und b).

## Übung 7: Schadenanzahl- und Schadenhöhenverteilungen, Modellanpassung I

### Aufgabe 1

Die Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_n$  seien stochastisch unabhängig und identisch-verteilt mit der Dichtefunktion

$$f_Y(y) = \begin{cases} \exp(-(y - \delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Schätzer für  $\delta$  erwartungstreu und/oder konsistent sind.

a) Das arithmetische Mittel:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

b) Der Schätzer  $\hat{Y}$  mit der Dichtefunktion:

$$f_{\hat{Y}}(y) = \begin{cases} n \exp(-n(y - \delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### Aufgabe 2

Es gelte  $N \sim \text{Bin}(n, p)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $p \in (0, 1)$ .

a) Zeigen Sie, dass  $\hat{X} = \frac{N}{n}$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $p$  ist.

b) Untersuchen Sie, ob  $\hat{Y} = n\hat{X}(1 - \hat{X})$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\text{Var}(N)$  ist.

### Aufgabe 3

Es sei  $\hat{X}_1$  ein Schätzer für den Parameter  $\theta \in (a, b)$  mit Dichtefunktion  $f_{\hat{X}}$  und durch

$$\hat{X}_2 = \begin{cases} a & \text{für } \hat{X}_1 \leq a \\ \hat{X}_1 & \text{für } \hat{X}_1 \in (a, b) \\ b & \text{für } \hat{X}_1 \geq b \end{cases}$$

sei ein weiterer Schätzer für  $\theta$  definiert.

a) Weisen Sie nach, dass  $\text{MSE}_{\hat{X}_1}(\theta) \geq \text{MSE}_{\hat{X}_2}(\theta)$  gilt.

b) Zeigen Sie, dass auch  $\text{Var}(\hat{X}_1) \geq \text{Var}(\hat{X}_2)$  gilt, falls der Schätzer  $\hat{X}_1$  zusätzlich erwartungstreu ist.

### Aufgabe 4

Die Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_n$  seien stochastisch unabhängig und  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilt.

a) Weisen Sie nach, dass  $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \sim \Gamma(n, \lambda)$  gilt.

b) Zeigen Sie, dass  $\lambda Y \sim \Gamma(n, 1)$  für  $\lambda > 0$  gilt.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) und b) das  $100(1 - \alpha)\%$ -Konfidenzintervall für  $\lambda$ .

## Übung 8: Modellanpassung II

### Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer und der Momentenschätzer einer  $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung mit  $\lambda > 0$  durch  $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{Y}}$  mit  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$  gegeben ist.

### Aufgabe 2

Von einer  $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariable  $X$  liegen die Beobachtungen 0,47, 0,49, 0,91, 1,00, 2,47, 5,03 und 16,09 vor. Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzungen für das 25%-Quantil  $x(0,25)$ .

### Aufgabe 3

Es sei  $X$  eine Zufallsvariable, deren Verteilung eine Mischung ist, die zu 40% aus einer  $\text{Exp}(\lambda_1)$ - und zu 60% aus einer  $\text{Exp}(\lambda_2)$ -Verteilung besteht. Es sei weiter bekannt, dass  $\mathbb{E}[X] = 4$  und  $\text{Var}(X) = 22$  gilt. Bestimmen Sie die Momentenschätzer für die Parameter  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

### Aufgabe 4

Es seien  $x'(p_1)$  und  $x'(p_2)$  mit  $0 < p_1, p_2 < 1$  die empirischen  $p_1$ - und  $p_2$ -Quantile einer Weibull( $a, b$ )-Verteilung. Bestimmen Sie Schätzer für die beiden Parameter  $a$  und  $b$  so, dass die empirischen und theoretischen  $p_1$ - und  $p_2$ -Quantile übereinstimmen (sog. Quantilmethode).

### Aufgabe 5

Im ersten Schadenjahr gab es 100 Versicherungsschäden mit einer durchschnittlichen Schadenhöhe von 10.000 € und im zweiten Schadenjahr waren es 200 Versicherungsschäden mit einer durchschnittlichen Schadenhöhe von 12.500 €. Die jährliche Inflationsrate beträgt 10% und die Schadenhöhen folgen einer  $\text{Par}(3, \lambda)$ -Verteilung. Bestimmen Sie die Momentenschätzung für den Parameter  $\lambda$  für das dritte Schadenjahr.

### Aufgabe 6

Gilt  $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$  mit  $\lambda > 0$ , dann besitzt  $X = Y^{-1}$  eine sogenannte Inverse- $\text{Exp}(\lambda)$ -Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von  $X$ .
- Ermitteln Sie den Median und den Modalwert von  $X$ .
- Für  $X$  wurden die drei Schadenhöhen 186, 91 und 66 beobachtet und von sieben weiteren Schadenhöhen ist bekannt, dass sie gleich oder kleiner als 60 sind. Berechnen Sie die ML-Schätzung für den Modalwert.

## Übung 9: Modellüberprüfung

### Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Daten:

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	1	2	3	7	12

- Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion formal an.
- Skizzieren Sie zu den gegebenen Daten einen Boxplot und interpretieren Sie diesen.
- Passen Sie an die gegebenen Daten eine Exponentialverteilung mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode an.

Hinweis: Verwenden Sie dabei das Resultat aus der Übung 8, Aufgabe 1.

- Beurteilen Sie die Güte der angepassten Verteilung mit Hilfe eines Kolmogorov-Smirnov-Tests zu einem Signifikanzniveau von 5%.

### Aufgabe 2

Über die letzten 20 Jahre wurden im Bereich der Naturgefahren folgende Anzahlen von Elementar-Großschadenereignissen (d. h. Schäden durch Sturm, Hagel, Überschwemmung, Erdbeben, Lawinen mit einer Höhe von mehr als 10 Mio. €) beobachtet:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl $N_i$	0	1	1	2	4	1	0	2	1	2	2	1	0	1	1	0	4	3	1	2

Testen Sie mittels eines  $\chi^2$ -Anpassungstests die Nullhypothese

$$H_0 : N_i \sim \Pi(\lambda)$$

bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$ .

### Aufgabe 3

Bei der Tariffberechnung in der Elementarschadenversicherung (d. h. gegen Sturm, Hagel, Überschwemmung, Erdbeben, Lawinen, Vulkanausbrüche) wird zwischen Normalschadenereignissen (Schadenhöhe  $< 50$  Mio. €) und Großschadenereignissen (Schadenhöhe  $\geq 50$  Mio. €) unterschieden. In den Jahren 1986 bis 2005 wurden die folgenden 15 Großschadenereignisse beobachtet (Indexierung der Schadenhöhen auf 2005):

Datum	Schadenhöhe $Y$ in Mio. €
20.06.1986	52,8
18.08.1986	135,2
18.07.1987	55,9
23.08.1987	138,6
26.02.1990	122,9
21.08.1992	55,8
24.09.1993	368,2
08.10.1993	83,8
18.05.1994	78,5
18.02.1999	75,3
12.05.1999	178,3
26.12.1999	182,8
04.07.2000	54,4
13.10.2000	365,3
20.08.2005	1051,1

- a) Passen Sie an die Großschadendaten  $Y$  eine europäische Pareto-Verteilung  $\text{Par}^*(\alpha, u)$  mit Threshold  $u = 50$  Mio. € an. Verwenden Sie zur Schätzung des Shapeparameters  $\alpha$  den modifizierten (erwartungstreuen) ML-Schätzer  $\hat{\alpha}_*^{ML}$ . Machen Sie hierbei auch eine Angabe über die Genauigkeit von  $\hat{\alpha}_*^{ML}$  mittels  $V_{\text{ko}}(\hat{\alpha}_*^{ML})$ .
- b) Überprüfen Sie die Anpassungsgüte mittels eines CDF-, log-log- und QQ-Plots.
- c) Die Schadenhöhe  $Y$  eines einzelnen Schadenereignisses sei nun durch eine Limite  $M = 2$  Mrd. € nach oben begrenzt. Berechnen Sie die erwartete Schadenhöhe bei einem einzelnen Großschadenereignis unter der Annahme, dass die Schadenhöhe  $Y$  die im Aufgabenteil a) angepasste europäische Pareto-Verteilung besitzt. Ermitteln Sie damit auch eine Schätzung für den erwarteten jährlichen Großschadenaufwand.
- d) Zusätzlich zu den Annahmen im Aufgabenteil c) sei angenommen, dass  $N_M$  die Anzahl von Großschadenereignissen pro Jahr ist, welche die Limite  $M = 2$  Mrd. € überschreiten, und  $N_M \sim \Pi(\lambda_M)$  gilt. Ermitteln Sie eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr die Limite von  $M = 2$  Mrd. € zur Anwendung kommt, sowie für die Wiederkehrperiode eines Großschadenereignisses, das die Limite überschreitet (d. h. die Länge des Zeitintervalls zwischen zwei Großschadenereignissen, welche die Limite übersteigen).

## Übung 10: Simulationsverfahren

### Aufgabe 1

Der Gesamtschaden eines Versicherungsportfolios sei gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

wobei die Schadenanzahl  $N$  und die identisch-verteilten Einzelschadenhöhen  $X_1, X_2, \dots$  stochastisch unabhängig sind und

$$\mathbb{P}(N = n) = 0,9 \cdot 0,1^{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$f_X(x) = 0,01 \cdot e^{-0,01} \quad \text{für } x > 0$$

gilt. Die Simulation der Zufallsvariablen  $N$  und  $X_1, X_2, \dots$  erfolge mittels der Inversionsmethode und den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen  $U \sim U[0, 1]$  und  $V_1, \dots, V_n \sim U[0, 1]$ .

Ermitteln Sie den resultierenden Gesamtschaden  $S$ , wenn für die Zufallsvariablen  $U, V_1, V_2, \dots$  die folgenden Pseudozufallszahlen generiert wurden:

$$u = 0,05, \quad v_1 = 0,3, \quad v_2 = 0,22, \quad v_3 = 0,52, \quad v_4 = 0,46$$

### Aufgabe 2

Der Gesamtschaden eines Versicherungsportfolios sei gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

wobei die Schadenanzahl  $N$  und die identisch-verteilten Einzelschadenhöhen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  stochastisch unabhängig sind. Weiterhin gelte

$$\mathbb{P}(N = n) = \begin{cases} \frac{2^n}{n!} e^{-2} & \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$F_X(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}; \mu \in \mathbb{R}, \beta > 0.$$

Die Simulation der Zufallsvariablen  $N$  und  $X_1, X_2, \dots, X_n$  erfolge mittels der Inversionsmethode und den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen  $U \sim U[0, 1]$  und  $V_1, \dots, V_n \sim U[0, 1]$ .

- Ermitteln Sie die resultierende Schadenanzahl  $N$ , wenn für die Zufallsvariable  $U$  die Pseudozufallszahl  $u = 0,8$  generiert wurde.
- Erzeugen Sie mit dem linearen Kongruenzgenerator drei Pseudozufallszahlen. Verwenden Sie dabei die Konstanten  $a = 18$ ,  $c = 11$ ,  $m = 100$  und den Keim  $x_0 = 40$ .
- Ermitteln Sie den resultierenden Gesamtschaden  $S$  unter Verwendung der in a) ermittelten Schadenanzahl und der in b) erzeugten Pseudozufallszahlen, für den Fall, dass  $\mu = 1$  und  $\beta = 2$  gilt.

### Aufgabe 3

Betrachtet wird eine Verteilungsfunktion  $F(x)$  mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{für } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- a) Ermitteln Sie mit Hilfe der Verwerfungsmethode und der Hilfsdichte

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

einen Algorithmus zur Erzeugung von  $F$ -verteilten Pseudozufallszahlen.

- b) Bestimmen Sie die Effizienz dieses Algorithmus.

### Aufgabe 4

Der Gesamtschaden eines Versicherungsportfolios sei gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

wobei die Schadenanzahl  $N$  und die identisch-verteilten Einzelschadenhöhen  $X_1, X_2, \dots$  stochastisch unabhängig sind und

$n$	$F_N(n)$
0	0,125
1	0,312
2	0,500
3	0,656
4	0,773
5	0,855
$\vdots$	$\vdots$

bzw.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/200)^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

Zusätzlich wird angenommen, dass pro Schaden der gedeckte Höchstschaden  $l = 650$  beträgt und ein Selbstbehalt von  $d = 150$  existiert. Der nun resultierende Gesamtschaden wird mit  $\tilde{S}$  bezeichnet. Die Simulation der Zufallsvariablen  $N$  und  $X_1, X_2, \dots$  erfolge mittels der Inversionsmethode und den stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen  $U \sim U[0, 1]$  und  $V_1, \dots, V_n \sim U[0, 1]$ .

Ermitteln Sie unter Berücksichtigung des gedeckten Höchstschadens  $l = 650$  und Selbstbehalts  $d = 150$  pro Schaden den resultierenden Gesamtschaden  $\tilde{S}$ , wenn für die Zufallsvariablen  $U, V_1, V_2, \dots$  die folgenden Pseudozufallszahlen generiert wurden:

$$u = 0,7654, \quad v_1 = 0,2738, \quad v_2 = 0,5152, \quad v_3 = 0,7537, \quad v_4 = 0,6481, \quad v_5 = 0,3153$$

### Aufgabe 5

Es gelte  $X := U^2$  und  $Y := (1 - U)^2$  mit  $U \sim U[0, 1]$ .

- a) Berechnen Sie  $\text{Var}(X)$ ,  $\text{Var}(Y)$ ,  $\text{Cov}(X, Y)$  und  $\text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right)$ .  
b) Bestimmen Sie eine (naive) Monte-Carlo-Schätzung für das Integral

$$\int_0^1 u^2 du \tag{1}$$

unter Verwendung von 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen  $U_1, \dots, U_{100} \sim U[0, 1]$ . Ermitteln Sie ferner eine Schätzung für die Varianz dieser Monte-Carlo-Schätzung.

- c) Zeigen Sie, wie die Monte-Carlo-Schätzung aus Aufgabenteil b) verbessert werden kann, wenn weiterhin nur die 100 unabhängigen Pseudozufallszahlen  $U_1, \dots, U_{100} \sim U[0, 1]$  aus Aufgabenteil b) zur Verfügung stehen.