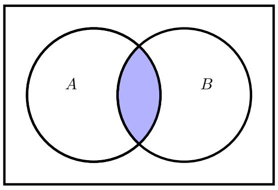
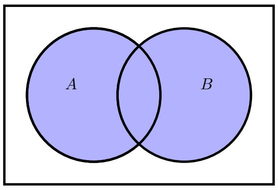
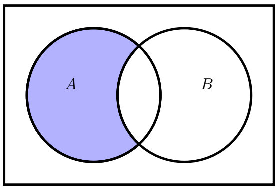
Formelsammlung

Mengenlehre

Für beliebige Mengen A, B gilt:

Schnittmenge $A \cap B$	Vereinigungsmenge $A \cup B$	Differenzmenge $A \setminus B$
		

Abbildungen

$f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Konvex ($\lambda \in (0,1)$)	$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \;\; \forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$
Konkav ($\lambda \in (0,1)$)	$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \;\; \forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$

Konvexe Menge

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn aus $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in M$ und $\lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \mathbf{a}_1 + (1-\lambda)\mathbf{a}_2 \in M \;\; \forall \lambda \in [0,1]$ gilt.

Vektoren $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$

Skalarprodukt	Norm	Abstand	Winkel
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$	$\|\|\mathbf{x}\|\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	$\|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$	$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\|\mathbf{x}\|\| \cdot \|\|\mathbf{y}\|\|}\right)$

Eigenschaften

des euklidischen Skalarprodukts, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$
der euklidischen Norm, $\lambda \in \mathbb{R}$	$\\|\mathbf{x}\\| \geq 0$ $\\|\lambda \mathbf{x}\\| = \|\lambda\| \cdot \\|\mathbf{x}\\|$	$\\|\mathbf{x}\\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ $\\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\\| \leq \\|\mathbf{x}\\| + \\|\mathbf{y}\\|$
Orthogonalität $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$	
Orthonormalität	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \wedge \\|\mathbf{x}\\| = \\|\mathbf{y}\\| = 1$	

Lineare Abbildungen

Es sei U eine nichtleere Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Linearer Unterraum	
Vektoraddition	$\mathbf{x}+\mathbf{y} \in U$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$
skalare Multiplikation	$\lambda\mathbf{x} \in U$ für alle $\mathbf{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$
Lineare Abbildung $f: U \to V$, $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$ lineare Unterräume	
Additivität	$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$
Homogenität	$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in U, \lambda \in \mathbb{R}$

	einer linearen Abbildung $f: U \to V$	einer $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$
Kern	Kern(f):= $\{\mathbf{x} \in U : f(x) = 0\}$	Kern($\mathbf{A}$):= $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
Bild	Bild(f):= $\{\mathbf{y} \in V :$ es gibt ein $\mathbf{x} \in U$ mit $\mathbf{y} = f(x)\}$	Bild($\mathbf{A}$):= $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m :$ es gibt ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\}$
Rang		$\text{rang}(\mathbf{A}) := \dim(\text{Bild}(\mathbf{A}))$

Zusammenhänge

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}^T) \qquad \text{rang}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$$

$$\dim(\text{Kern(f)} + \dim(\text{Bild(f)}) = \dim(U) \qquad \dim(\text{Kern}(\mathbf{A})) + \text{rang}(\mathbf{A}) = n$$

$$\text{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\} \Longleftrightarrow \text{rang}(\mathbf{A}) = n$$

Matrizen

Es sei $\mathbf{A}$ eine quadratische $n \times n$-Matrix.

Inverse Matrix	$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$
Symmetrische Matrix	$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
Orthogonale Matrix	$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$
Spur	$\operatorname{spur}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Eigenschaften

der Spur	$\operatorname{spur}(\mathbf{E}_n) = n$ $\operatorname{spur}(\mathbf{A}) = \operatorname{spur}(\mathbf{A}^T)$	$\operatorname{spur}(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}) = \lambda \operatorname{spur}(\mathbf{A}) + \mu \operatorname{spur}(\mathbf{B})$ für $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(n,n), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\operatorname{spur}(\mathbf{AB}) = \operatorname{spur}(\mathbf{BA})$ für $\mathbf{A} \in M(m,n)$ und $\mathbf{B} \in M(n,m)$
inverser Matrizen	$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$	$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ $(r\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{r}\mathbf{A}^{-1}$

Berechnungsformeln für invertierbare Matrizen

2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
$n \times n$-Matrix	$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{pmatrix} \mathbf{A}^*_{11} & \mathbf{A}^*_{21} & \cdots & \mathbf{A}^*_{n1} \\ \mathbf{A}^*_{12} & \mathbf{A}^*_{22} & \cdots & \mathbf{A}^*_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^*_{1n} & \mathbf{A}^*_{2n} & \cdots & \mathbf{A}^*_{nn} \end{pmatrix}$, wobei $\mathbf{A}^*_{ij} := (-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij})$ die Kofaktoren der Matrix $\mathbf{A}$ sind.

Determinanten

Es seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ quadratische $n \times n$-Matrizen.

Eigenschaften von Determinanten

$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$	$\mathbf{A}$ invertierbar $\Rightarrow \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$
$\det(r\mathbf{A}) = r^n \det(\mathbf{A})$	$\mathbf{A}$ orthogonal $\Rightarrow \lvert\det(\mathbf{A})\rvert = 1$
$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$	

Berechnungsformeln

$n \times n$-Matrix	$\det(\mathbf{A}) := \begin{cases} a_{11} & \text{für } n = 1 \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\mathbf{A}_{1j}) & \text{für } n > 1 \end{cases}$
2×2-Matrix	$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3×3-Matrix	$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$
Dreiecksmatrix	$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
nach Laplace, mit Untermatrix $\mathbf{A}_{ij}$	$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij})$ Entwicklung nach Zeile i $\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij})$ Entwicklung nach Spalte j

Lineare Gleichungssysteme

Für die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ von $\mathbf{Ax}$=$\mathbf{b}$ der Ordnung $m \times n$ gilt:

keine Lösung	genau eine Lösung	unendlich viele Lösungen
$\text{rang}(\mathbf{A}) < \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$	$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$	$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) < n$

Cramersche Regel
Es sei $\mathbf{A}$ eine invertierbare $n \times n$-Matrix.

Mit $A_{(j)} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ist die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ gegeben durch:

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}_{(j)})}{\det(\mathbf{A})} \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

Eigenwerttheorie

Für eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ heißt eine Zahlt $\lambda \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

eine Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ besitzt, reeller Eigenwert von $\mathbf{A}$ und der Vektor $\mathbf{x}$ wird als reeller Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ bezeichnet.

Eigenschaften

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{A} \iff \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien Eigenwerte von $\mathbf{A}$, dann gilt:

$\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$ sind Eigenwerte von $\mathbf{A}^m$

$\mathbf{A}$ invertierbar $\Leftrightarrow \lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$

$\mathbf{A}$ invertierbar $\Rightarrow \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$

$\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$ besitzen die gleichen Eigenwerte

$\mathbf{A}$ orthogonal $\Rightarrow |\lambda_i| = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$

Folgen und Reihen

Definitionen

Bezeichnung	Definition
Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$	$a : D \longrightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n := a(n)$ mit $D \subseteq \mathbb{N}_0$
n-te Partialsumme von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$	$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
Reihe	$(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Wichtige Folgen & Reihen

Bezeichnung	Explizite Folgendarstellung	Partialsumme
Arithmetische Folge mit $a_{n+1} - a_n = d \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$	$a_{n+1} = a_0 + (n+1)d$	$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(a_0+kd) = (n+1)\left(a_0 + \frac{nd}{2}\right)$
Geometrische Folge mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\,; q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$a_{n+1} = q^{n+1}a_0$	$s_n = a_0 \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} a_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ a_0(n+1) & q = 1 \end{cases}$

Eigenschaften einer Folge a_n mit $a, c \in \mathbb{R}$

Beschränkt	$\lvert a_n\rvert \leq c$	$\forall n \in \mathbb{N}_0$
Nach unten beschränkt	$a_n \geq c$	$\forall n \in \mathbb{N}_0$
Nach oben beschränkt	$a_n \leq c$	$\forall n \in \mathbb{N}_0$
Monoton wachsend	$a_n \leq a_{n+1}$	$\forall n \in \mathbb{N}_0$
Monoton fallend	$a_n \geq a_{n+1}$	$\forall n \in \mathbb{N}_0$
Konvergent mit Grenzwert a	$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \quad \lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$	$\forall n \geq n_0$

Rechenregeln für konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $c \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^c = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^c = a^c$, falls $a_n > 0, a > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} c^{a_n} = c^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)} = c^a$, falls $c > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab$
- $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ca$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b_n \neq 0, b \neq 0$

Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Häufungspunkt und Grenzwert

Bezeichnung	Definition
Häufungspunkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** der Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele $\mathbf{x} \in D$ mit $\|\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\| < \varepsilon$ existieren.
Isolierter Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$	Ist $\mathbf{x}_0$ kein Häufungspunkt der Menge, aber gilt $\mathbf{x}_0 \in D$, dann wird $\mathbf{x}_0$ als **isolierter Punkt** bezeichnet.
Grenzwert $c \in \mathbb{R}$	Ist $\mathbf{x}_0$ ein Häufungspunkt, dann sagt man, dass die Funktion f für $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ gegen den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ **konvergiert**, wenn für jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\mathbf{x}_k \neq x_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ stets $\lim\limits_{k\to\infty} f(\mathbf{x}_k) = c$ gilt.

Kurvendiskussion in $\mathbb{R}$

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige, geeignet oft differenzierbare Funktion, d.h. der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (**Differentialquotient**) existiert, sowie $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

Bezeichnung	Definition	Bedingungen
Supremum c von f	c ist die kleinste obere Schranke von f	
Infimum c von f	c ist die größte untere Schranke von f	
globale Minimalstelle x_0	$x_0 \in D$ mit $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in D$	$f'(x_0) = 0 \ \wedge\ f''(x) > 0$
globale Maximalstelle x_0	$x_0 \in D$ mit $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D$	$f'(x_0) = 0 \ \wedge\ f''(x) < 0$
lokale Minimalstelle x_0	$x_0 \in D$ mit $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in D \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|\|x - x_0\|\| < \varepsilon\}$	$f'(x_0) = 0 \ \wedge\ f''(x_0) > 0$
lokale Maximalstelle x_0	$x_0 \in D$ mit $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in D \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \|\|x - x_0\|\| < \varepsilon\}$	$f'(x_0) = 0 \ \wedge\ f''(x_0) < 0$
Wendestelle x_0 konvex / konkav	$\exists \varepsilon > 0$ mit $f \in [x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng konvex und $f \in [x_0, x_0 - \varepsilon]$ streng konkav	$f''(x_0) = 0 \ \wedge\ f'''(x_0) < 0$
Wendestelle x_0 konkav / konvex	$\exists \varepsilon > 0$ mit $f \in [x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng konkav und $f \in [x_0, x_0 - \varepsilon]$ streng konvex	$f''(x_0) = 0 \ \wedge\ f'''(x_0) > 0$
Sattelstelle x_0		$f'(x_0) = 0 \ \wedge\ f''(x_0) = 0$ $\wedge\ f'''(x_0) \neq 0$

Eigenschaften reeller Funktionen

Seien $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt:

Bedingung	Eigenschaft
falls f stetig bzw. differenzierbar an der Stelle $\mathbf{x_0}$	$f+g, f-g, fg$ und αf stetig bzw. differenzierbar an der Stelle $\mathbf{x_0}$
falls zusätzlich $g(\mathbf{x_0}) \neq 0$	$\frac{f}{g}$ stetig bzw. differenzierbar an der Stelle $\mathbf{x_0}$
falls zusätzlich $g(D_g) \subseteq D_f$ und g an der Stelle $\mathbf{x_0} \in D_g$ und f an der Stelle $\mathbf{y_0} = g(\mathbf{x_0})$ stetig bzw. differenzierbar	$f \circ g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $\mathbf{x_0}$ stetig bzw. differenzierbar
falls f streng monoton auf D_f	$f^{-1} : f(D_f) \to \mathbb{R}$ stetig

Rechenregeln für differenzierbare Funktionen

Seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen, die an der Stelle $\mathbf{x_0}$ differenzierbar sind, und $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $(f+g)'(\mathbf{x_0}) = f'(\mathbf{x_0}) + g'(\mathbf{x_0})$
- $(f-g)'(\mathbf{x_0}) = f'(\mathbf{x_0}) - g'(\mathbf{x_0})$
- $(fg)'(\mathbf{x_0}) = f'(\mathbf{x_0})g(\mathbf{x_0}) + f(\mathbf{x_0})g'(\mathbf{x_0})$
- $(\alpha f)'(\mathbf{x_0}) = \alpha f'(\mathbf{x_0})$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(\mathbf{x_0}) = \frac{f'(\mathbf{x_0})g(\mathbf{x_0}) - f(\mathbf{x_0})g'(\mathbf{x_0})}{g^2(\mathbf{x_0})}$
- $(f \circ g)'(\mathbf{x_0}) = f'(g(\mathbf{x_0}))g'(\mathbf{x_0})$

Regeln von L'Hôspital

Die reellen Funktionen $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \, \forall x \in (a,b)$ und der Grenzwert $\lim\limits_{x \uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiere im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne. Dann gilt:

Bedingung	$\lim\limits_{x\uparrow b} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow b} g(x) = 0$	Bedingung	$\lim\limits_{x\uparrow b} f(x) = \pm\infty \quad \lim\limits_{x\uparrow b} g(x) = \pm\infty$
Erste Regel	$\lim\limits_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$	Zweite Regel	$\lim\limits_{x\uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\uparrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Partielle Differentiation

Es sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf einer offenen Menge D, die geeignet oft partiell differenzierbar ist.

Bezeichnung	Definition
Partielle Differentiation	f heißt an der Stelle $\mathbf{x}$ bzgl. der i-ten Variablen x_i **partiell differenzierbar**, wenn der Grenzwert $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + \Delta x \cdot \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{\Delta x} =: \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$ existiert.
Gradient an der Stelle $\mathbf{x}$	$f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^T$
Stationäre Stelle $\mathbf{x_0}$	$f(\mathbf{x_0}) = 0$
Hesse-Matrix an der Stelle $\mathbf{x}$	$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$
Tangentialhyperebene	$t(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0}) + f(\mathbf{x_0})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x_0})$

Optimierung

Es sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, $g_1, \ldots, g_k : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbare Funktionen und λ der Lagrange-Multiplikator.

Optimierung ohne Nebenbedingung	$f(\mathbf{x}_0) = 0 \wedge \mathbf{H_f}(\mathbf{x_0})$ / $\mathbf{H_f}(\mathbf{x})$ negativ definit $\Rightarrow$ lokales / globales Maximum bei $\mathbf{x_0}$ $f(\mathbf{x}_0) = 0 \wedge \mathbf{H_f}(\mathbf{x_0})$ / $\mathbf{H_f}(\mathbf{x})$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales / globales Minimum bei $\mathbf{x_0}$
Lagrange Funktion	$L(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{p=1}^{k} \lambda_p g_p(\mathbf{x})$
Jacobi-Matrix	$\mathbf{J}_g(\mathbf{x_0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{x_0})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(\mathbf{x_0})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k(\mathbf{x_0})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k(\mathbf{x_0})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Integration

Es sei die Riemann-integriebare Funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt:

Bezeichnung	Definition
Stammfunktion $F : [a; b] \to \mathbb{R}$	$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a; b]$
Bestimmtes Riemann-Integral	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
Unbestimmtes Riemann-Integral	$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$
Uneigentliches Riemann-Integral 1. Art mit $f : [a; \infty) \to \mathbb{R}$	$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
Uneigentliches Riemann-Integral 2. Art mit $f : [a; b) \to \mathbb{R}$ mit $\lvert f(x) \rvert \to \infty$ für $x \uparrow b$	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim\limits_{t \uparrow b} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$

Rechenregeln für Integrale mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \leq c \leq b$

$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$	$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c \alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x$
$\int f(x) g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\,\mathrm{d}x$	$\int f(g(t)) g'(t) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{mit } x = g(t)$

Ableitungen und Stammfunktionen elementarer Funktionen

$f(x) = F'(x)$	$F(x) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x$	Bemerkungen
a	$ax + C$	
x^c	$\frac{1}{c+1}x^{c+1} + C$	$\mathbb{R}$ für $c \in \mathbb{N}_0$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $c \in \{-2, -3, \ldots\}$ $\mathbb{R}_+$ für $c > 0$ $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ für $c < 0$ mit $c \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
e^x	$e^x + C$	
e^{rx}	$\frac{1}{r}e^{rx} + C$	$r \neq 0$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + C$	$a > 0, a \neq 1$
$x^x(1 + \ln(x))$	$x^x + C$	$x > 0$
$\ln(x)$	$x(\ln(x) - 1) + C$	$x > 0$
$\log_a(x)$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln(x) - 1) + C$	$a > 0, x > 0$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\cot(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert + C$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$\lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	