Übung 4: Allokationsverfahren & stochastische Abhängigkeiten

Aufgabe 1

Es sei erneut die Situation aus Übung 3, Aufgabe 1, gegeben. Berechnen Sie für die drei Geschäftsbereiche X_1, X_2, X_3 das jeweils resultierende Risikokapital

a) bei Verwendung der Stand-alone-proportionalen Allokation und des Value-at-Risk zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ als Risikomaß,

b) bei Verwendung der inkrementellen Allokation und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ als Risikomaß (zuerst für X_1, dann für X_2 und zum Schluss für X_3),

c) bei Verwendung des (modifizierten) Kovarianzprinzips und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ als Risikomaß,

d) bei Verwendung des Conditional-Tail-Expectation-Prinzips zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ und

e) bei Verwendung des Euler-Prinzips und des Expected-Shortfalls zum Sicherheitsniveau $q = 0{,}995$ als Risikomaß.

Aufgabe 2

Bei den Marktrisiken einer Versicherungsgesellschaft wurden unter der Normalverteilungsannahme $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ für die einzelnen Risikokategorien X_i mittels

$$\mathrm{RK}(X_i) = \mathrm{ES}_q(X_i - \mathbb{E}[X_i])$$

(sog. mean Expected-Shortfall) für das Sicherheitsniveau $q = 99\%$ die folgenden Stand-alone-Risikokapitalien ermittelt:

	Zinsänderungsrisiko	Spreadrisiko	Aktienpreisrisiko	Währungsrisiko
$\mathrm{RK}(X_i)$	195 Mio. €	60 Mio. €	210 Mio. €	75 Mio. €

a) Bestimmen Sie das Risikokapital $\mathrm{RK}(X)$ für das aggregierte Marktrisiko $X = \sum_{i=1}^4 X_i$ unter der vereinfachenden Annahme, dass die Risiken in den vier Kategorien X_i stochastisch unabhängig sind. Um wieviel Prozent ist dieses Risikokapital kleiner als die Summe der Stand-alone-Risiko- kapitalien $\mathrm{RK}(X_i)$ (Diversifikationseffekt)?

b) Führen Sie nun die gleiche Berechnung unter der realistischeren Annahme durch, dass zwischen den Risiken in den vier Kategorien die folgenden Korrelationen ρ_{ij} bestehen:

Korrelationsmatrix				
	Zinsänderungsrisiko	Spreadrisiko	Aktienpreisrisiko	Währungsrisiko
Zinsänderungsrisiko	1	$-0{,}08$	0,24	0,24
Spreadrisiko	$-0{,}08$	1	$-0{,}37$	$-0{,}29$
Aktienpreisrisiko	0,24	$-0{,}37$	1	0,37
Währungsrisiko	0,24	$-0{,}29$	0,37	1

Aufgabe 3

Es sei $X \sim \mathrm{U}[-1, 1]$ und $Y := X^2$, d. h. X besitzt die Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Weisen Sie nach, dass X und Y unkorreliert sind.

b) Zeigen Sie, dass X und Y nicht stochastisch unabhängig sind.

Hinweis: Berechnen Sie hierzu die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \leq -1/4, Y \leq 1/4)$, $\mathbb{P}(X \leq -1/4)$ und $\mathbb{P}(Y \leq 1/4)$).

Aufgabe 4

Die folgende Tabelle enthält 10 Wertepaare mit Renditen der BMW- und Siemensaktie:

i	X_i (BMW-Aktie)	Y_i (Siemensaktie)
1	0,0030	-0,0051
2	0,0224	0,0072
3	-0,0059	-0,0055
4	0,0206	0,0017
5	-0,0058	0,0160
6	-0,0118	-0,0013
7	0,0064	0,0219
8	0,0039	0,0016
9	-0,0015	-0,0156
10	-0,0238	-0,0222

a) Berechnen Sie den empirischen linearen Korrelationskoeffizienten $r(X,Y)$.

b) Bestimmen Sie den Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall $r_\tau(X,Y)$.

c) Ermitteln Sie den Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman $r_S(X,Y)$.

Aufgabe 5

Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ sei bivariat normalverteilt mit dem Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und der Varianz-Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

d h. $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

a) Geben Sie die Randverteilungen der Zufallsvariablen X_1 und X_2 an.

b) Dominiert eine der Zufallsvariablen X_1 bzw. X_2 die andere stochastisch? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

c) Sind die Zufallsvariablen X_1 und X_2 stochastisch abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X_1 > 8)$.

e) Bestimmen Sie die Verteilung der affin-linearen Transformation $\mathbf{AX} + \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$