Übung 5: Schadenanzahl- und Schadenhöhenverteilungen, Modellanpassung

Aufgabe 1

Die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n$ seien stochastisch unabhängig und identisch-verteilt mit der Dichtefunktion

$$f_Y(y) = \begin{cases} \exp(-(y-\delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Schätzer für δ erwartungstreu und/oder konsistent sind.

a) Das arithmetische Mittel:

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

b) Der Schätzer $\widehat{Y}$ mit der Dichtefunktion:

$$f_{\widehat{Y}}(y) = \begin{cases} n\exp(-n(y-\delta)) & \text{für } y > \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2

Es gelte $N \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$.

a) Zeigen Sie, dass $\widehat{X} = \frac{N}{n}$ ein erwartungstreuer Schätzer für p ist.

b) Untersuchen Sie, ob $\widehat{Y} = n\widehat{X}(1 - \widehat{X})$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\mathrm{Var}(N)$ ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer und der Momentenschätzer einer $\mathrm{Exp}(\lambda)$-Verteilung mit $\lambda > 0$ durch $\widehat{\lambda} = \frac{1}{\overline{Y}}$ mit $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ gegeben ist.

Aufgabe 4

Von einer $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariable X liegen die Beobachtungen 0,47, 0,49, 0,91, 1,00, 2,47, 5,03 und 16,09 vor. Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzungen für das 25%-Quantil $x(0{,}25)$.

Aufgabe 5

Es sei X eine Zufallsvariable, deren Verteilung eine Mischung ist, die zu 40% aus einer $\mathrm{Exp}(\lambda_1)$- und zu 60% aus einer $\mathrm{Exp}(\lambda_2)$-Verteilung besteht. Es sei weiter bekannt, dass $\mathbb{E}[X] = 4$ und $\mathrm{Var}(X) = 22$ gilt. Bestimmen Sie die Momentenschätzer für die Parameter λ_1 und λ_2.