# Übung 6: Modellanpassung & Modellüberprüfung

### Aufgabe 1

Es seien $x'(p_1)$ und $x'(p_2)$ mit $0 < p_1, p_2 < 1$ die empirischen $p_1$- und $p_2$-Quantile einer Weibull$(a, b)$-Verteilung. Bestimmen Sie Schätzer für die beiden Parameter $a$ und $b$ so, dass die empirischen und theoretischen $p_1$- und $p_2$-Quantile übereinstimmmen (sog. Quantilmethode).

Hinweis: Die Verteilungsfunktion für eine Weibull$(a, b)$-verteilte Zufallsvariable $X$ finden Sie in Abschnitt 6.8 der Vorlesung.

### Aufgabe 2

Im ersten Schadenjahr gab es 100 Versicherungsschäden mit einer durchschnittlichen Schadenhöhe von 10.000 € und im zweiten Schadenjahr waren es 200 Versicherungsschäden mit einer durchschnittlichen Schadenhöhe von 12.500 €. Die jährliche Inflationsrate beträgt 10% und die Schadenhöhen folgen einer Par$(3, \lambda)$-Verteilung. Bestimmen Sie die Momentenschätzung für den Parameter $\lambda$ für das dritte Schadenjahr.

### Aufgabe 3

Gilt $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$, dann besitzt $X = Y^{-1}$ eine sogenannte Inverse-Exp$(\lambda)$-Verteilung mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\frac{\lambda}{x}}}{x^2} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $X$.

b) Ermitteln Sie den Median und den Modalwert von $X$.

c) Für $X$ wurden die drei Schadenhöhen 186, 91 und 66 beobachtet und von sieben weiteren Schadenhöhen ist bekannt, dass sie gleich oder kleiner als 60 sind. Berechnen Sie die ML-Schätzung für den Modalwert.

### Aufgabe 4

Gegeben seien die folgenden Daten:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 7 | 12 |

a) Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion formal an.

b) Skizzieren Sie zu den gegebenen Daten einen Boxplot und interpretieren Sie diesen.

c) Passen Sie an die gegebenen Daten eine Exponentialverteilung mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode an.

Hinweis: Verwenden Sie hierfür das Resultat aus der Übung 5, Aufgabe 3.

d) Beurteilen Sie die Güte der angepassten Verteilung mit Hilfe eines Kolmogorov-Smirnov-Tests zu einem Signifikanzniveau von 5%.

**Aufgabe 5**

Bei der Tarifberechnung in der Elementarschadenversicherung (d. h. gegen Sturm, Hagel, Überschwemmung, Erdbeben, Lawinen Vulkanausbrüche) wird zwischen Normalschadenereignissen (Schadenhöhe $<$ 50 Mio. €) und Großschadenereignissen (Schadenhöhe $\geq$ 50 Mio. €) unterschieden. In den Jahren 1986 bis 2005 wurden die folgenden 15 Großschadenereignisse beobachtet (Indexierung der Schadenhöhen auf 2005):

| Datum | Schadenhöhe $Y$ in Mio. € |
|---|---|
| 20.06.1986 | 52,8 |
| 18.08.1986 | 135,2 |
| 18.07.1987 | 55,9 |
| 23.08.1987 | 138,6 |
| 26.02.1990 | 122,9 |
| 21.08.1992 | 55,8 |
| 24.09.1993 | 368,2 |
| 08.10.1993 | 83,8 |
| 18.05.1994 | 78,5 |
| 18.02.1999 | 75,3 |
| 12.05.1999 | 178,3 |
| 26.12.1999 | 182,8 |
| 04.07.2000 | 54,4 |
| 13.10.2000 | 365,3 |
| 20.08.2005 | 1051,1 |

a) Passen Sie an die Großschadendaten $Y$ eine europäische Pareto-Verteilung $\mathrm{Par}^*(\alpha, u)$ mit Threshold $u = 50$ Mio. € an. Verwenden Sie zur Schätzung des Shapeparameters $\alpha$ den modifizierten (erwartungstreuen) ML-Schätzer $\widehat{\alpha}_*^{ML}$. Machen Sie hierbei auch eine Angabe über die Genauigkeit von $\widehat{\alpha}_*^{ML}$ mittels $\mathrm{Vko}(\widehat{\alpha}_*^{ML})$.

b) Überprüfen Sie die Anpassungsgüte mittels eines log-log- und QQ-Plots. Benutzen Sie zum Bilden der Plots eine der gängigen Statistiksoftwares (Stata, R, Python).

**Aufgabe 6***

Über die letzten 20 Jahre wurden im Bereich der Naturgefahren folgende Anzahlen von Elementar-Großschadenereignissen (d. h. Schäden durch Sturm, Hagel, Überschwemmung, Erdbeben, Lawinen mit einer Höhe von mehr als 10 Mio. €) beobachtet:

| Jahr | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl $N_i$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 4 | 3 | 1 | 2 |

Testen Sie mittels eines $\chi^2$-Anpassungstests die Nullhypothese

$$H_0 : N_i \sim \Pi(\lambda)$$

bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$.
Hinweis: Benutzen Sie für $\Pi(\lambda)$ den BLUE-Schätzer $\widehat{\lambda}^{BLUE}$, siehe Abschnitt 7.3.

*Zusatzaufgabe