Mathematische Grundlagen

1. Gegeben seien die Mengen:

$$A = \{a, b, c, e, f\}$$
$$B = \{b, c, f\}$$
$$C = \{b, e\}$$
$$D = \{e, f, b, a, c\}$$
$$\Omega = \{a, b, c, e, f, h, i\}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an:

1. $C \subseteq D \subseteq A$
2. $A \subset C$
3. $B \subset A$
4. $\bar{A} = \{f, h, i\}$

2. Gegeben seien die Mengen:

$$A = \{1, 10\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 10\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 10\}$$

Berechnen Sie:

a) $A \setminus C$
b) $B \setminus (A \cup C)$
c) $B \cup C$
d) $B \cap C$

3. Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f : D \to E$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 + x$$

Geben Sie für den bijektiven Fall mit $D = [-\frac{1}{2}, \infty)$ und $E = [-\frac{1}{4}, \infty)$ die Umkehrfunktion von f an und skizzieren Sie beide Graphen.

4. Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f : D \to E$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Geben Sie für den bijektiven Fall mit $D = \mathbb{R}$ und $E =]0, \infty)$ die Umkehrfunktion von f an und skizzieren Sie beide Graphen.

Vektoren und Matrizen (1)

5. Gegeben seien die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $\|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|, \|\mathbf{c}\|, \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|$ und $\|\mathbf{c}-\mathbf{b}\|$.

b) Den Abstand zwischen den Punkten, die durch die Ortsvektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gegeben sind.

c) γ_1 und γ_2, wobei γ_1 der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, γ_2 der von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ eingeschlossene Winkel ist.

6. Prüfen Sie, ob die drei Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -13 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig oder linear abhängig sind.

7. Gegeben seien die Matrix $\mathbf{A}$ und der Spaltenvektor $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$

b) $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T$

c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$

d) $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$

e) $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$

8. Gegeben seien die Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bilden Sie die Matrizenprodukte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

9. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektoren und Matrizen (2)

10. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 4 \\ 8 & 12 & 12 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den Rang von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{B}^T$. Ist $\mathbf{B}$ regulär oder singulär?

b) Sind die Spalten von $\mathbf{B}$ linear abhängig? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

c) Sind die Spalten von $\mathbf{B}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

11. Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Prüfen Sie, ob die Matrix $\mathbf{A}$ orthogonal ist.

b) Bestimmen Sie die zu $\mathbf{A}$ inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$.

13. Welche der Aussagen a) - f) sind als wahr oder falsch zu beurteilen?

a) Besitzt eine m x n-Matrix A mit m $>$ n nicht den vollen Rang, dann sind nicht alle Spalten linear unabhängig.

b) Die Einheitsmatrix E weist den vollen Rang auf.

c) Jede reguläre Matrix ist invertierbar.

d) Ist A invertierbar, dann ist auch A^T invertierbar und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

e) Besitzt eine n x n-Matrix eine Inverse, dann gilt rang(A) $=$ n.

f) Eine orthogonale Matrix A ist nicht zwingend invertierbar.

Determinanten

14. Gegeben sei die Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det(\mathbf{A}), \det(\mathbf{A}^T), \det(2 \cdot \mathbf{A})$ und $\det(\mathbf{A}^2)$.

15. Gegeben seien drei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\mathbf{A}$ ist regulär mit $\det(\mathbf{A}) = 10$.

ii) Für $\mathbf{B}$ gilt: $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 1$.

iii) Für $\mathbf{C}$ gilt: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ ist singulär, d.h. nicht invertierbar.

Berechnen Sie:

a) $\det(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})$

b) $\det(-\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1})$

c) $\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{C})$

d) $\det(\mathbf{C} + \mathbf{C})$

16. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie a derart, dass A symmetrisch ist.

b) Bestimmen Sie für $a = -1$ die Spur und die Determinante von A jeweils auf zwei verschiedenen Wegen.

17. Welche der Aussagen a) - e) sind als wahr oder falsch zu beurteilen? *(Wiederholung Matrizen)*

a) Dreiecksmatrizen können symmetrisch sein.

b) Gegeben seien zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$.

c) Nicht jede Teilmenge einer Menge linear abhängiger Vektoren ist linear abhängig.

d) Als Skalarprodukt bezeichnet man die Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix.

e) Zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ heißen orthonormal, wenn $\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a} = 0$ und $||\mathbf{a}|| = ||\mathbf{b}|| = 1$ gilt.

18. Welche der Aussagen a) - c) sind als wahr oder falsch zu beurteilen?

a) Jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ besitzt eine Determinante.

b) Weist eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht den vollen Rang auf, gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

c) Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Dann gilt $|\det(\mathbf{A}^{-1})| = 1$.

Lineare Gleichungssysteme (1)

19. Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2 \cdot x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 3 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & 5 \cdot x_3 & = & 1 \\ 4 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & & & = & 4 \end{array}$$

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem als erweiterte Koeffizientenmatrix dar.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

20. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen?

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem.

c) Geben Sie den zugehörigen Nullraum an.

21. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & a \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

a) Bestimmen Sie für $a = 3$ und $b = -9$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

b) Für welche Kombinationen von $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen?

22. Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} t & t & -1 \\ 1 & 1 & s \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix},$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die reellen Zahlen s und t, so dass $\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}$ gilt.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = (2, 3, -1)^T$.

Eigenwerte und Eigenvektoren

23. Gegeben sei die Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie das Spektrum von $\mathbf{A}$.

b) Geben Sie zu jedem Eigenwert von $\mathbf{A}$ alle Eigenvektoren an.

24. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{B}$

$$P_{\mathbf{B}}(\lambda) = (5+\lambda)(4+\lambda)(5-\lambda)$$

gilt.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{B}$.

c) Bestimmen Sie zum kleinsten Eigenwert alle zugehörigen Eigenvektoren.

25. Welche der Aussagen a) - e) sind als wahr oder falsch zu beurteilen?

a) Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.

b) Für eine beliebige quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\text{spur}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Dann gilt $a_{ii} = \lambda_i \ \forall i$.

c) Gegeben sei eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ist ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ gleich Null, sind $\mathbf{A}$ selbst und $\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}$ singulär, wobei λ einen beliebigen Eigenwert von $\mathbf{A}$ darstellt.

d) Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$ besitzen in der Regel nicht das selbe Spektrum.

e) Gegeben sei eine invertierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann sind alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ nichtnegativ.

26. Gegeben seien die Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ positiv definit bzw. negativ definit?

27. Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms ergeben sich zu $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 4$.

a) Geben Sie die charakteristische Gleichung $P_A(\lambda) = 0$ explizit an.

b) Bestimmen Sie die zu $\mathbf{A}$ gehörige quadratische Form $q(x_1, x_2, x_3) = x^T \mathbf{A}\mathbf{x}$.

c) Bestimmen Sie die Definitheitseigenschaft von $\mathbf{A}$ über ihre Hauptunterdeterminanten und über ihre Eigenwerte.

Folgen und Reihen

28. Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen:

a) $a_n := \dfrac{n^5 + 3n^4}{3n^6 - 3n^4}, \qquad n \in \mathbb{N}$

b) $b_n := \dfrac{2n^3 - 2n + 7}{7n^3 + n^2 - 2}, \qquad n \in \mathbb{N}$

c) $c_n := \dfrac{5n^4 + 2n^2}{2n^3 + 3} - \dfrac{10n + 1}{4}, \qquad n \in \mathbb{N}$

29. Untersuchen Sie folgende Folgen auf Monotonie, Beschränktheit, Häufungspunkte und Konvergenz, geben Sie Maximum und Minimum bzw. Supremum und Infimum an und fertigen Sie eine Skizze der jeweiligen Folge an:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n := \frac{1}{3} + \frac{1}{2n}$$

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$b_n := (-1)^n \cdot \frac{5n^2}{n^2 + 7n + 8}$$

c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$c_n := (-1)^{n+1} \cdot \frac{6n^2 + 13n}{5n^3 + 7}$$

d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$d_n := (-1)^n \cdot \frac{3n^2 + 5}{2n^2}.$$

30. Geben Sie den Wert der Reihe
$$\frac{3}{5} + \frac{3}{50} + \frac{3}{500} + \cdots$$
als Bruch mit ganzzahligem Zähler und ganzzahligem Nenner an.

31. Ein Unternehmen produziert 300 Einheiten eines Gutes im ersten Jahr und steigert die Produktion in jedem der folgenden Jahre um 60 Einheiten.

a) Wie viele Einheiten werden im zehnten Jahr produziert?

b) Wie groß ist die Gesamtsumme der Produktion nach zehn Jahren?

Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

32. Gegeben sei die Funktion einer reellen Variablen x mit $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Berechnen und vereinfachen Sie:

$$\varphi(\Delta x) := \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$.

c) Welche Bezeichnung ist für $\varphi(\Delta x)$ üblich? Wie heißt der unter b) berechnete Grenzwert und welche Bedeutung hat dieser für die Funktion f?

33. Geben Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen an:

a) $h(z) = \sqrt{4 \sin\left(\frac{z}{2}\right) + 2}$

b) $y(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(2x + 1)$

c) $g(z) = e^{-2z}\sqrt{x^2 + 2}$

34. Geben Sie jeweils die ersten drei Ableitungen der Funktionen an und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $f(x) = 5x^4 - 7x^2 + cos(\frac{x}{2})$

b) $g(x) = 2e^{-x}x^3$

35. Untersuchen Sie rechnerisch folgende Funktionen auf ihr Krümmungsverhalten. Fertigen Sie zusätzlich eine Skizze an.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}$

c) $f(x) = x^3 - x^2$

36. Zu bestimmen sei eine ganzrationale Funktion dritten Grades $f(x)$. Der Graph dieser Funktion verläuft durch die Punkte $P(-2, 12)$ und $Q(2, -7)$. Des Weiteren sei bekannt, dass sich die Graphen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion an der Stelle $x = 3$ berühren.

37. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern diese existieren:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{\frac{1}{3}x^3 - x \cdot \ln 3}$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\ln(x - 4)}{x - 5}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin(x))^2}{x^2}$

Approximation, Optimierung und Kurvendiskussion in $\mathbb{R}$

38. Für die Absatzmenge $X(t)$ in ME eines Produktes wird folgende Entwicklung für $t \geq 0$ prognostiziert:

$$X(t) := -6e^{-0{,}05t^2} + 10$$

a) Das punktuelle Änderungsverhalten $X'(t)$ nimmt zunächst ständig zu, um ab einem bestimmten Zeitpunkt t_0 wieder zurück zu gehen. Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_0 dieser Trendwende.

b) Untersuchen Sie, ob $X(t)$ für sehr große Werte von t einem Sättigungswert zustrebt und wenn ja, bestimmen Sie diesen.

39. Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$f : (0, 40) \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = -\frac{2}{5}x^3 + 18x^2 + 24x.$$

a) Bestimmen Sie, für welchen Faktoreinsatz x die Grenzproduktivität maximal ist.

b) Ermitteln Sie das Ertragsmaximum.

c) Bestimmen Sie, für welchen Faktoreinsatz x der Durchschnittsertrag maximal ist.

d) Untersuchen Sie, für welchen Faktoreinsatz x der Grenz- und Durchschnittsertrag übereinstimmen. Skizzieren Sie den Graphen von f.

40. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}.$$

Bestimmen Sie die

a) Nullstellen,

b) lokalen Extrema (und klassifizieren Sie diese),

c) Grenzwerte für $x \to \pm\infty$, sofern diese existieren und

d) Monotoniebereiche (und klassifizieren Sie diese).

41. Welche der Aussagen a) - e) sind als wahr oder falsch zu beurteilen?

a) Eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt an einer Stelle $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$ genau dann eine Extremalstelle, wenn sie dort ihr Monotonieverhalten verändert.

b) Eine zweimal differenzierbare Funktion f, die an der Stelle x_0 einen Wendepunkt mit einem Übergang der Krümmung von konvex zu konkav besitzt, weist in ihrer ersten Ableitungsfunktion f' an der Stelle x_0 ein lokales Maximum auf.

c) Ist $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine dreimal stetige Funktion mit $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ für eine Stelle $x_0 \in (a, b)$, dann besitzt sie in x_0 einen Sattelpunkt (Terrassenpunkt).

d) In einem Wendepunkt verändert eine Funktion ihr Krümmungsverhalten.

e) Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente wird als Sattel- oder Terrassenpunkt bezeichnet.

Integralrechnung in $\mathbb{R}$

42. Berechnen Sie die folgenden bestimmten und uneigentlichen Riemann-Integrale:

a) $\int\limits_0^1 x^4 \; dx$

b) $\int\limits_{-3}^1 |x+2| \; dx$

c) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} \; dx$

d) $\int\limits_{-1}^1 |x| \cdot x^2 \; dx$

43. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^3 - x$.

a) Berechnen Sie das Riemann-Integral

$$\int_{-5}^5 f(x) \; dx \,.$$

b) Wie groß ist die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse, die seitlich durch die Geraden $x = -5$ und $x = 5$ begrenzt wird?

44. Berechnen Sie die folgenden Riemann-Integrale:

a) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \cos\left(x^2\right) \; dx$

b) $\int 2x \cdot e^{-2x^2+t} \; dx$

c) $\int x \cdot \sin\left(x^2\right) \; dx$

45. Berechnen Sie die folgenden Riemann-Integrale:

a) $\int\limits_0^1 2x^3 \cdot e^{x^2} \; dx$

b) $\int x^a \cdot \ln(x) \; dx \quad$ für $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|x|)^2} \; dx$

46. Gegeben sei die Grenzkostenfunktion $K'(x) := \frac{4x}{\sqrt[3]{30+4x^2}}$.

a) Bestimmen Sie alle zugehörigen Kostenfunktionen.

b) Für welche Kostenfunktion gilt $K(5) = 30$? Wie groß sind in diesem Fall die Fixkosten?

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

47. Ermitteln Sie den Gradienten und die HESSE-Matrix für folgende Funktionen:

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) := x^2 \cdot \sin(y^2)$

b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ (x, y) \mapsto g(x, y) := e^{2xy^2}$

48. Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}, \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) := 2x^2 z + 4z\ln(x) - e^{xy} \end{aligned}$$

mit $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0\}$. Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (2{,}1{,}1)$.

49. Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}, \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) := 3x^2 \ln(y) + 4x^3 z^2 - y^2 z^3 \end{aligned}$$

mit $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y > 0\}$. Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f. Bestimmen Sie zudem die Tangentialhyperebene von f an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.

Optimierung im $\mathbb{R}^n$

50. Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x,y) := -\frac{1}{4}x^4 + x - y^3 + 3y^2 + 9y + 50$$

a) Bestimmen Sie die stationären Stellen der Funktion f.
b) Überprüfen Sie, ob es sich bei den stationären Stellen um Extremwerte handelt.

51. Betrachtet wird die reellwertige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) = 2xy$$

unter der Nebenbedingung

$$2x + 4y = 80.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $2x + 4y = 80$. Begründen Sie, ob es sich bei diesen Kandidaten bereits um alle möglichen Kandidaten für die Extremalstellen von f unter der angegebenen Nebenbedingung handelt.
b) Erläutern Sie mit Hilfe der geränderten Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion L, ob die in Aufgabenteil a) ermittelten Kandidaten tatsächlich Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $2x + 4y = 80$ sind.
c) Erläutern Sie, ob es sich bei den in Aufgabenteil b) ermittelten Extremalstellen von f um globale Extremalstellen handelt.

52. Gegeben sei die konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) := x_1^2 + 3x_2^2\,.$$

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von f unter Einhaltung der Nebenbedingungen

$$g(x_1, x_2) := 4x_1 + 12x_2 = -80\,.$$

53. Die Nutzenfunktion eines Haushaltes sei gegeben über:

$$\begin{aligned} U : [0,12] \times [0,20] &\longrightarrow \mathbb{R}_+\,, \\ (x,y) &\mapsto U(x,y) := -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{213}{2} - \frac{1}{4}y^2 + 2y \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen x und y die gekauften Mengen zweier Güter. Nehmen Sie an, dass der Haushalt über ein Einkommen von $M = 100$ verfügt und dass die Preise beider Güter jeweils $p = 4$ betragen. Ermitteln Sie das Güterbündel, das den Nutzen des Haushaltes unter vollständiger Ausschöpfung seines Einkommens maximiert.